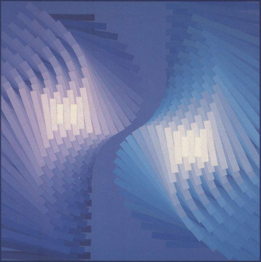
HANS LAUWERIER



ONEINDIGHEID

EEN ONBEREIKBAAR IDEAAL

ARAMITH UITGEVERS

9,90

Oneindigheid

To see a world in a grain of sand,
And a heaven in a wild flower,
To hold infinity in the palm of your hand,
And eternity in an hour.

William Blake

HANS LAUWERIER

ONEINDIGHEID

Een onbereikbaar ideaal

ARAMITH UITGEVERS BLOEMENDAAL

CIP-gegevens Koninklijke Bibliotheek, Den Haag

Lauwerier, Hans

Oneindigheid. Een onbereikbaar ideaal
Hans Lauwerier
Bloemendaal, Aramith. Met foto's en tekeningen
ISBN 90 6834 055 7
SISO 510.3 UDC 517.1 + 125 NUGI 811
Trefwoord: oneindigheid

© 1989 H.A. Lauwerier
Omslagontwerp en typografische vormgeving
Marjo Starink/Studio Cursief
Zetwerk Zetcentrale Meppel
Druk Ten Brink Meppel
Alle rechten voorbehouden

INHOUD

Voorwoord 7
1 Inleiding 11
2 De oneindigheden van Cantor 19
3 Breuken met gebreken 29
4 Limieten, rijen en reeksen 38
5 Oneindig verre punten en lijnen 52
6 Niet-Euclidische meetkunde 64
7 Stabiliteit, orde en chaos 74
8 Vreemde aantrekkers 87
9 Oneindig met de computer 101

Appendix 119
Bibliografie 125
Illustratieverantwoording 127

In nature's infinite book of secrecy a little I can read

Shakespeare, Antony and Cleopatra, Act 1, Sc. 2

VOORWOORD

De opzet van dit boek is de lezer mee te nemen op een reis door tijd en ruimte en hem deelgenoot te maken van de verschillende denkbeelden omtrent het begrip oneindigheid. Denken over oneindig is proberen een antwoord te geven op vragen als: 'Wat zou er gebeuren wanneer ik met de een of andere handeling oneindig lang doorga?' In dit boek wordt de oneindigheid benaderd vanuit de wiskunde, een wetenschap waarin een zorgvuldig taalgebruik, het hanteren van scherp omlijnde begrippen en logisch redeneren centraal staat.

Gepoogd is de lezer zoveel mogelijk te betrekken bij wat filosofen en wiskundigen ons over de oneindigheid te zeggen hebben. Hij wordt uitgenodigd mee te denken over de paradox van Achilles en de schildpad, een paradox die Zeno zo'n 2500 jaar geleden opstelde. Maar ook wordt de lezer voorgesteld achter de computer te experimenteren met een programma, een wiskundig model, dat iets met de problematiek van het oneindige te maken heeft.

Eeuwenlang heeft men in de wiskunde onbekommerd gewerkt met begrippen als oneindig klein en oneindig groot, zonder dat men behoefte had aan een axiomatische onderbouw. Archimedes en Newton leverden indrukwekkende prestaties met de ontwikkeling van de *Arithmetica Infinitorum*, wat wij differentiaal- en integraalrekening noemen. Aan het begin van de vorige eeuw was de wiskunde uitgegroeid tot een reus op lemen voeten, maar dank zij de bijdragen van Cauchy en Cantor zijn de fundamenten op ingrijpende wijze verstevigd.

Aristoteles kende een enkele oneindigheid die hij de potentiële oneindigheid noemde. Hij drukte daarmee uit dat de oneindigheid een onbereikbaar ideaal was. De eenvoudigste wiskundige handeling is het tellen, 1, 2, 3,... de rij van de natuurlijke getallen, waarbij men desgewenst ook met 0 mag beginnen. Dat tellen kan wel almaar doorgaan, maar een mens vermag er slechts een eindig aantal van te kunnen bevatten.

Volgens Thomas van Aquino is God de absolute oneindigheid. De mens is van nature eindig en kan geen deel hebben aan de oneindigheid en kan die ook niet begrijpen.

Aan Cantor danken we niet alleen een beter inzicht in de axiomatische opbouw van het getalbegrip, maar ook en vooral de schepping van een nieuw wiskundig gebied, de leer van de verzamelingen. Cantor gaf een goede definitie van een onmeetbaar getal, en hij liet zien dat er fundamenteel verschillende vormen van oneindigheid bestaan: aftelbaar oneindig en onaftelbaar oneindig. Aan al deze zaken is in de eerste vier hoofdstukken ruime aandacht gegeven. Wiskundig technische zaken zijn daarbij zoveel mogelijk vermeden of althans tot een minimum beperkt.

Een heel ander soort oneindigheid is die van meetkundige aard. We denken dan aan punten en lijnen die oneindig ver weg zijn. De oneindigheid kan binnen ons bereik worden gebracht volgens de regels van de perspectief. Filosoferen over de grondslagen van de meetkunde in relatie tot de oneindigheid voert ons tot de niet-Euclidische meetkunde, boeiende onderwerpen die in de hoofdstukken 5 en 6 ter sprake komen.

Het denken over oneindigheid, over wat er op den duur gebeurt, is als het voorspellen van de toekomst op grond van beschikbare gegevens. Die toekomst kan gedefinieerd zijn als een ideale en stabiele structuur, maar ze kan ook onvoorspelbaar en chaotisch zijn. Tegenwoordig zijn begrippen als orde en chaos, fractals en vreemde aantrekkers sterk in de mode. Alle hebben ze te maken met de oneindigheid, en in de laatste drie hoofdstukken wordt daar veel aandacht aan besteed.

De wereld van chaos, vreemde aantrekkers en fractals is voor ons nog betrekkelijk nieuw. Dat geldt zowel voor de wiskundige theorie als voor de praktische toepassingen. De tendens is om over die zaken meer te weten te komen door eenvoudige modellen te bestuderen, wiskundige modellen die met behulp van computers goed geanalyseerd kunnen worden. In zekere zin is het een sport om met een zo eenvoudig mogelijk model een maximum aan wetenschappelijke informatie te verkrijgen om zodoende meer inzicht te krijgen in de veel ingewikkelder verschijnselen in de ons omringende wereld. In dit boek bespreken we aldus het model van Lorenz dat inzicht geeft in de onvoorspelbaarheid van het weer, het model van Hénon dat de ingewikkeldheid van de hemelmechanica toont, en nog een paar andere modellen die met oneindigheid te maken hebben. In de Appendix staat een aantal eenvoudige computerprogramma's met behulp waarvan de lezer zelf met deze modellen kan experimenteren. Het geeft grote voldoening wanneer men na het intikken van een klein aantal regels op het beeldscherm van de computer een 'strange attractor' of een 'fractal' ziet ontstaan. Weliswaar kunnen we er niet oneindig lang mee doorgaan, maar langs deze weg wordt ons wel een blik gegund op de onbereikbare oneindigheid.

Amsterdam, november 1989
Hans Lauwerier

Notaties

In dit boek worden decimale breuken zonder een eventueel voorafgaande 0 en met een decimaalpunt geschreven, dus .001 voor 1/1000.

De natuurlijke logaritme wordt zoals in computerprogramma's geschreven als log en niet als ln.

I

INLEIDING

Oneindig wordt in de omgangstaal nogal eens in overdrachtelijke zin gebruikt om iets uit te drukken wat heel ver weg is, hetzij in ruimte, hetzij in tijd. We zeggen 'oneindig ver' of 'oneindig lang', en spreken op analoge wijze van 'oneindig veel', 'oneindig groot' en 'oneindig klein'. In de natuurwetenschappen heeft men behoefte aan scherp gedefinieerde begrippen. Laten we eens proberen het begrip oneindig in de betekenis van oneindig ver nader te preciseren. Die opgave lijkt niet al te moeilijk:

Oneindig ver is verder dan men denkt

Maar is dat wel een definitie? Laten we even veronderstellen dat we met betrekking tot iets wat ver weg is, de maan bij voorbeeld, een bepaald denkbeeld hebben. De bovenstaande uitspraak maakt ons meteen duidelijk dat we verder weg moeten zijn. We denken dan mogelijk aan de zon, maar we moeten 'het' blijkbaar verder zoeken. Dan maar een ster, maar de moderne kosmologie weet ook daar een in menselijke maat te bemeten afstand aan toe te kennen. Verder dus maar weer, tot aan de grenzen van het heelal misschien, maar daarover weten we helemaal niets.

Ons gedachtenexperiment voert tot een mislukking. Of we zijn oneindig lang bezig met denken, als een eeuwigdurend tweegesprek met onszelf, of we zijn terechtgekomen bij een begrip dat net zo vaag is als het oneindige dat we juist willen definiëren. Over 'oneindig' zouden we eindeloos kunnen filosoferen, met groot gevaar dat we verstrikt raken in cirkelredeneringen. Onze omgangstaal is ook niet gemaakt om op heel precieze wijze met scherp gedefinieerde begrippen te werken. Dat is meer het werk van de logica en de wiskunde, de schepping van de Griekse geleerden in de klassieke Oudheid, zo'n 25 eeuwen geleden.

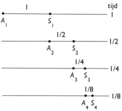
We kunnen niet anders dan grote bewondering hebben voor de denkkracht van de vroege geleerden van het Middellandse Zeegebied. In hun streven de natuur te begrijpen legden ze tegelijk de grondslagen van de logica en de wiskunde, de taal waarin de wetten van de natuur het beste uitgedrukt kunnen worden. De wiskunde

voerden zij tot een hoge graad van abstractie, op een niveau dat, na een inzinking van ongeveer twintig eeuwen, pas in de vorige eeuw geëvenaard zou worden. Men kan stellen dat het werk van Griekse denkers als Zeno, Eudoxos en Aristoteles rechtstreeks voortgezet wordt door wiskundigen of filosofen als Cantor, Hilbert en Brouwer.

De potentiële oneindigheid

Aristoteles (384 - 322 v. Chr.), de grondlegger van de moderne logica, onderwierp het begrip 'oneindig' aan een systematische analyse. Voor hem was dat een proces, een redenering die onbegrensd voortgezet kon worden. Oneindig dus als onbereikbaar ideaal. Dat er oneindig veel natuurlijke getallen bestaan betekent voor Aristoteles slechts dat men bij het aftellen steeds verder kan komen. Een oneindig lange lijn betekent in die zienswijze een proces waarbij een zeker lijnstuk onbeperkt verlengd kan worden. Voor oneindig als bij voorbeeld het collectief van alle natuurlijke getallen was geen plaats. In de woorden van Aristoteles (in klassiek Latijn): 'Infinitum actu non datur.' Een actueel oneindig bestaat niet. Over het zogenaamd oneindig kleine had Aristoteles analoge opvattingen, een onbeperkt proces van voortdurende deling. Tot aan het midden van de vorige eeuw was dat de gebruikelijke visie, en grote wiskundigen als Newton (1643 - 1727), Euler (1707 - 1783) en Gauss (1777 - 1855) konden er prima mee overweg. Gauss schrijft in een brief aan een vriend dat hij protesteert tegen het gebruik van oneindig als iets voltooids, iets dat in de wiskunde niet geoorloofd is... 'Het oneindige is slechts een *façon de parler*...' Maar laten we terugkeren tot de tijd van de Griekse wijzen, Aristoteles was wel een van de allergrootsten, maar voor en na hem hebben vele andere Griekse geleerden ook diep nagedacht over begrippen als de oneindige deelbaarheid van de materie, de oneindige hoeveelheid getallen, kortom over oneindigheid in vele facetten. En nog steeds zijn de reeds door de Grieken gestelde vragen tot in onze tijd actueel gebleven.

Achilles en de schildpad



Figuur 1.1 Achilles en de schildpad.

Menigeen kent de volgende beroemde paradox van de wijsgeer Zeno van Elea (495 - 435 v. Chr.). Volgens Zeno gaat Achilles, de beroemde held van de Trojaanse oorlog, een hardloopwedstrijd aan met een schildpad. Zij moeten een zelfde traject afleggen en de vraag is wie het eerste aankomt. Omdat een schildpad langzamer is, krijgt deze een voorsprong. Laten we zeggen dat de schildpad wat eerder mag vertrekken. Wanneer Achilles start, is de schildpad al een eindje op streek en bevindt zich op een positie die we met S_1 aanduiden (zie figuur 1.1). Wanneer Achilles de positie S_1 heeft bereikt, is de schildpad verder gekomen en heeft nu de plaats S_2 ingenomen. Wanneer Achilles al lopende bij S_2 is aangekomen, is

de schildpad bij S_3. Zo gaat het steeds maar door tot in het oneindige. Telkens wanneer Achilles dacht de schildpad ingehaald te hebben, is deze weer verder gekomen. De 'conclusie' is dus dat Achilles de schildpad nooit kan inhalen. Een conclusie die strijdig is met ons gezond verstand, verstand dat gebaseerd is op directe waarneming, van de Olympische Spelen bij voorbeeld. Maar wat is er dan fout in onze redenering? De tijdgenoten van Zeno wisten er geen raad mee, en het heeft dan ook tot in de vorige eeuw geduurd voordat men voldoende inzicht had in de paradox.

Achilles kan niet lopen

Zeno had nog meer van dergelijke raadsels. De volgende redenering laat zien dat Achilles helemaal niet kon lopen, want alvorens Achilles het einde van het traject bereikt zal hebben moet hij zich op een eerder moment halverwege hebben bevonden. Voordat Achilles de helft van de weg bereikt zal hebben, zal hij zich op een eerder tijdstip op de helft daarvan hebben bevonden. Dezelfde redenering kunnen we oneindig vaak herhalen, het houdt nooit op. We zijn op deze wijze nog steeds aan het redeneren, voordat Achilles een stap kan doen. Met andere woorden, Achilles blijft stilstaan en komt eenvoudigweg niet in beweging.

Welke moeite Zeno had met de continuïteit van de tijd blijkt uit de volgende paradox. Een pijl afgeschoten door een boogschutter is op elk moment òf in rust òf in beweging. Tijd dient opgevat te worden als een aaneenschakeling van momenten die zelf ondeelbaar zijn. Wanneer de pijl op een bepaald moment in beweging zou zijn, zou dat tegelijk de deelbaarheid van het moment impliceren. Hieruit volgt dat op elk moment de pijl stilstaat. Maar dan staat de pijl ook helemaal stil! Archimedes (ca. 287-212 v. Chr.) wist later op vaardige wijze met 'oneindig kleine' grootheden te werken, als een vroege voorloper van Newton, een van de scheppers van de differentiaal- en integraalrekening, maar op de achtergrond bleven de filosofische vragen op antwoord wachten, een antwoord dat pas de vorige eeuw werd gegeven.

Achilles haalt de schildpad toch in

Laten we de eerste paradox eens van een modern standpunt bezien, en zowel Achilles als de schildpad vervangen door mathematische punten die zich met een constante snelheid over een lijn bewegen. Gemakshalve nemen we aan dat Achilles één meter per seconde aflegt en de schildpad de helft daarvan. Weliswaar weinig realistisch, maar voor de redenering maakt het niets uit. We geven de schildpad een voorsprong van een meter en Achilles heeft maar één seconde nodig om de startpositie S_1 van de schildpad te bereiken. In die tijd is de schildpad een halve meter verder gekropen en bevindt zich op de plaats S_2. Om daar te komen heeft Achilles maar een halve seconde nodig. De schildpad is in die tijd een kwart meter

opgeschoten en Achilles doet daar een kwart seconde over. Al door redenerende op de wijze van Zeno neemt de wedstrijd

$1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$

seconden in beslag. Wij weten dat het resultaat twee seconden is, de som van de oneindig voortlopende reeks. De wereld staat na die twee seconden niet stil, en de klokken blijven doortikken. Achilles heeft de schildpad precies op de tik van de tweede seconde ingehaald en loopt daarna verder uit. Wat in de redenering van Zeno met 'nooit' wordt bedoeld, heeft slechts betrekking op het tijdsverloop tot aan de tweede seconde, de tik niet meegerekend.

Ontwakende wetenschap

De Griekse wetenschap pleegt men te laten beginnen met Thales van Milete (624-546 v. Chr.), de eerste in de rij van de zeven Griekse wijzen. Thales ontleende zijn kennis van de natuurwetenschappen aan het Babylonische erfgoed. Voor het eerst ontwierp hij een abstract en wetenschappelijk beeld van de kosmos zonder allerlei goden en demonen daarin te betrekken. Zijn leerling Anaximander van Milete (ca. 610-546 v. Chr.) zette het werk voort en kwam tot de voorstelling van een bolvormige kosmos, oorspronkelijk gevuld met een magische oersubstantie, een gedachte die weer heel actueel is in de moderne opvatting van het heelal. Als eerste introduceerde hij het begrip oneindig (Grieks *apeiron*), maar verder dan een nogal vage voorstelling hiervan kwam hij niet.

Pythagoras

Bij Pythagoras van Samos (ca. 540 v. Chr.) denken we tegenwoordig in de eerste plaats aan een wiskundige die een bekende naar hem genoemde meetkundige stelling heeft gevonden. In de Oudheid zag men hem veeleer als een wijze en een religieus profeet, stichter van een broederschap van gelovigen, de Pythagoreeërs. Wiskunde was een deel van hun religie. God heeft de kosmos volgens getallen geordend, God is de eenheid en de wereld is veelheid en bestaat uit tegendelen. Wat eenheid brengt in de tegendelen en ze tot kosmos, tot orde, verenigt, is de harmonie. De harmonie is goddelijk en bestaat uit getalverhoudingen. Wie deze goddelijke getallenharmonie leert doorgronden, wordt zelf goddelijk en onsterfelijk. Volgens de Pythagoreeërs behoren muziek, harmonie en getallen onverbrekelijk bij elkaar.

Men kan aannemen dat Pythagoras als Ioniër veel contact had met de geleerden van Tweestromenland. De naar hem genoemde stelling was daar in elk geval al bekend. Rechtstreekse aanwijzingen zijn er overigens niet, maar van veel aan Pythagoras toegeschreven wiskundige vondsten kan men overeenkomstige zaken in de Babylonische wetenschap terugvinden. De grote verdienste

van Pythagoras is ongetwijfeld dat hij en zijn leerlingen op de in Mesopotamië vergaarde kennis wisten voort te bouwen en de basis konden leggen voor de meer abstract ingestelde Griekse wiskunde. De Pythagoreeërs zagen de rij van de natuurlijke getallen 1, 2, 3,... als de basis van alle kennis. Zij kenden ook enkele bijzondere getallen met speciale eigenschappen. Allereerst de priemgetallen, de natuurlijke getallen groter dan 1 die alleen door 1 en door zichzelf deelbaar zijn. Het eerste priemgetal is 2, overigens het enige even priemgetal, daarna komen 3, 5 en 7. Het getal 4 is geen priemgetal, want $4=2\times 2$. Evenmin is $6=2\times 3$ een priemgetal. De eerste tien priemgetallen zijn

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29,...

De vraag rijst al of die rij almaar voortgezet kan worden.

Volmaakte getallen

De Pythagoreeërs vonden het zeer merkwaardig wanneer een getal gelijk was aan de som van zijn echte delers (het getal zelf niet meegerekend). De eerste getallen met deze eigenschap zijn

$$6=1+2+3$$

en

$$28=1+2+4+7+14$$

De Grieken noemden dit volmaakte getallen. Augustinus zou later schrijven: 'Het getal zes is op zichzelf volkomen... God schiep alle dingen in zes dagen omdat dit getal volkomen is.' De volgende twee volmaakte getallen, 496 en 8128, waren ook bekend, en Euclides kende zelfs een recept om dergelijke getallen te construeren. Zijn methode kunnen we aflezen uit de volgende schrijfwijze

$$\begin{aligned}6 &= (1+2)\times 2\\ 28 &= (1+2+4)\times 4\\ 496 &= (1+2+4+8+16)\times 16\\ 8128 &= (1+2+4+8+16+32+64)\times 64\end{aligned}$$

Voorwaarde is alleen dat de tussen haakjes geplaatste factor een priemgetal is.

Uiteraard vragen we ons weer af of dit het begin is van een oneindige rij. Het zou ook kunnen zijn dat er andere volmaakte getallen bestaan die niet door het gegeven recept geleverd kunnen worden. Dat laatste is in elk geval tot dusverre niet gebleken. Het vijfde volmaakte getal is overigens 33 550 336 en dat werd gevonden in een middeleeuws handschrift. Tot aan het tijdperk van de elektronische computer waren er in totaal twaalf volmaakte getallen

bekend en nu is het aantal van dertig maar net gepasseerd. Of er nog oneindig veel meer zijn, weten we niet.

Euclides

De beroemdste Griekse wiskundige was ongetwijfeld Euclides (of Eukleides in de Griekse spelling). Zijn faam dankt hij niet aan grote prestaties, maar aan het min of meer toevallige feit dat juist van hem werken bewaard zijn gebleven. Over zijn leven is nauwelijks iets bekend. Hij leefde in de tijd van de eerste Ptolemaeus (306-283 v. Chr.), tegenover wie hij de opmerking zou hebben gemaakt dat er tot de meetkunde geen koninklijke weg is. Zijn belangrijkste werk is de uit dertien boeken bestaande *Elementen*, een compilatie van wat grote, en veel minder bekende, Griekse wiskundigen als Eudoxos en Theaitetos tot stand hadden gebracht. Voor ons is vooral Theaitetos van belang als de ontdekker van de onmeetbare getallen. Ook zijn werk zou pas in de negentiende eeuw voortgezet worden. De *Elementen* van Euclides hebben de wetenschap en het onderwijs tot in onze eeuw gedomineerd. Na de Bijbel was het stellig het meest verbreide en bestudeerde boekwerk. In de *Elementen* kan men veel van de door de Pythagoreeërs ontwikkelde getallenleer terugvinden. Zo treft men er stellingen aan over de deelbaarheid van getallen, over de grootste gemene deler en het kleinste gemene veelvoud. Een hoogtepunt is het bewijs dat er oneindig veel priemgetallen bestaan. We komen er nog op terug.

Er zijn oneindig veel natuurlijke getallen

De rij van de natuurlijke getallen houdt nooit op. We kunnen met tellen almaar doorgaan, tot in het oneindige. Met dat laatste, een ook in de omgangstaal veelgebruikte zegswijze, bedoelen we eigenlijk hetzelfde. Wanneer we zeggen dat er oneindig veel natuurlijke getallen bestaan, willen we daarmee tot uitdrukking brengen dat we in staat zijn een willekeurige hoeveelheid, oneindig veel in de zin van potentiële oneindigheid, van die getallen te produceren. Men spreekt in dat verband wel van een constructieve of van een potentiële oneindigheid. Weliswaar kunnen we langs constructieve weg nooit een collectief van oneindig veel getallen formeren, maar wel beschikken we over een eenvoudig mechanisme om er willekeurig veel te kunnen produceren. Dat mechanisme is eenvoudigweg 'er telkens 1 bij optellen'. Wanneer we de rij van de natuurlijke getallen 1, 2, 3, 4, 5,... bezien dan kunnen we zeggen dat elk getal uit zijn voorganger is afgeleid door er 1 bij op te tellen. Alleen het eerste getal 1 heeft geen voorganger en moet dus als een startwaarde worden beschouwd.

In iets meer wiskundige taal kan men de oneindigheid van de natuurlijke getallen baseren op de twee uitspraken, axioma's zo men wil:

1 is een natuurlijk getal
Elk natuurlijk getal heeft een opvolger, een nieuw natuurlijk getal

Men noemt dit een *recursieve* definitie. Recursieve redeneringen komen in de wiskunde en bij computerprogramma's veel voor. Om de recursieve definitie van de natuurlijke getallen te begrijpen, specificeren we het vormen van een opvolger als $n \rightarrow n+1$, dat wil zeggen we tellen er telkens 1 bij op. Elk willekeurig natuurlijk getal kan dan met behulp van een aantal stappen 'op recursieve wijze' uit 1 afgeleid worden. Het getal 7 is uit 6 ontstaan door er 1 bij op te tellen, 6 is op zijn beurt de opvolger van 5, 5 komt weer na 4, 4 is weer gevormd uit 3, 3 is de opvolger van 2, de opvolger van 1. Al teruglopend komen we bij het begin van alles, het getal 1, terecht. Ten slotte moeten we ons realiseren dat 'recursief' afgeleid is van het Latijnse werkwoord *recurrere* dat teruglopen betekent.

Alle natuurlijke getallen, en dat zijn er oneindig veel, kunnen met andere woorden in een recursieve definitie van slechts twee regels volledig gedefinieerd worden.

Er zijn oneindig veel priemgetallen

In het negende boek van de *Elementen* van Euclides wordt deze stelling uitgesproken en bewezen. Dat bewijs komt eigenlijk neer op een recursieve redenering zoals hierboven gevoerd is met betrekking tot de natuurlijke getallen. Het komt erop neer een begin te hebben (de eerste regel) en een recursieve procedure welke uit reeds aanwezige priemgetallen een nieuwe afleidt (de tweede regel). Welnu, 2 is een priemgetal. Hebben we bij onze constructie de beschikking over de eerder gevormde priemgetallen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ dan beschouwen we het getal

$$m = p_1 \times p_2 \times \ldots \times p_n + 1$$

Is dat getal een priemgetal dan zijn we klaar en kunnen we het gebruiken als opvolger van p_n. Is m deelbaar, dan is de kleinste echte deler van m een priemgetal dat zeker van $p_1, p_2, \ldots$ verschilt omdat bij deling van m door een van deze getallen de rest steeds 1 is. Ook dan is er een opvolger beschikbaar. We slagen er aldus in een reeds aanwezige voorraad van priemgetallen verder uit te bouwen, een proces dat oneindig lang kan doorgaan. Een beginvoorraad – je moet tenslotte ergens mee beginnen – is met het eerste priemgetal 2 gegarandeerd.

Voor rekenaars is het leuk de constructie langs numerieke weg een paar stappen te volgen, maar voor het bewijs is het natuurlijk niet nodig. We beginnen met $n=1$ en $p_1=2$. Het getal m is dan gelijk aan 3. De volgende stappen geven aanleiding tot het lijstje

$$2 \times 3 + 1 = 7$$
$$2 \times 3 \times 7 + 1 = 43$$
$$2 \times 3 \times 7 \times 43 + 1 = 1807$$

Het getal 1807 is geen priemgetal maar het is het produkt van de priemfactoren 13 en 139. We voegen aan ons lijstje dus 13 als p_5 toe en gaan verder met

$$2 \times 3 \times 7 \times 43 \times 13 + 1 = 23\,479$$

Ook dat resultaat is deelbaar en wel gelijk aan 53×443, maar het levert 53 als priemgetal p_6. Zo kunnen we nog heel lang doorgaan, maar veel meer dan een *Spielerei* is het niet. Telkens worden we geconfronteerd met het probleem of een gegeven getal een priemgetal is, en zo nee wat dan zijn delers zijn. Dat is geen gemakkelijk probleem wanneer het te onderzoeken getal uit veel cijfers bestaat. Het is hier niet de plaats er dieper op in te gaan, maar ten gerieve van degenen die over een snelle computer beschikken is in de Appendix een eenvoudig programma PRIEM opgenomen dat, werkend in Turbo Basic, een snelle factorisatie van een groot getal mogelijk maakt. De grens ligt in het programma bij $2^{31}-1=2\,147\,483\,647$.

2 DE ONEINDIGHEDEN VAN CANTOR

We kunnen zeggen dat Cantor (1845 - 1918) de eerste wiskundige was die de volledige beheersing van het oneindige wist te verkrijgen. Zijn denkbeelden hebben een verstrekkende betekenis, zowel voor de wiskunde als voor de filosofie in de zin van de logica. Door Cantor zijn we ook gaan twijfelen over de zin van de axiomatische fundering van het logische denken. Kunnen we er bij voorbeeld zeker van zijn dat bepaalde axiomastelsels vrij zijn van tegenspraak? Deze vraag werd pas in onze eeuw door de Oostenrijkse wiskundige Kurt Gödel (1906 - 1978) beantwoord met de wereldschokkende mededeling dat we dat nooit zullen weten. Door Cantor zijn we ons bewust geworden van het bestaan van paradoxen welke niet op eenvoudige wijze te ondervangen waren. Kortom, de betekenis van Cantors denkbeelden voor de grondslagen van de wiskunde en de logica is van uitzonderlijk historisch belang.

Cantor bouwt rechtstreeks voort op het werk van de Griekse filosofen en wiskundigen die wel de goede vragen konden stellen maar ze niet wisten te beantwoorden.

Een deel is gelijk aan het geheel

Cantor had een paar voorlopers. Het was bij voorbeeld Galileo Galilei (1564 - 1642) al opgevallen dat er 'evenveel' kwadraten als vierkantswortels waren. Immers, zo redeneerde hij, elk kwadraat heeft een wortel en elke wortel geeft gekwadrateerd weer een kwadraat. In meer detail en ook diepgaander hield Bernard Bolzano (1781 - 1848) zich bezig met de *Paradoxien des Unendlichen*, de titel van een publikatie die drie jaar na zijn dood verscheen. In zijn eigen woorden:

'Ich behaupte nämlich: zwei Mengen, die beide unendlich sind, können in einem solchen Verhältnisse zueinander stehen, dass es einerseits möglich ist, jedes der einen Menge gehörige Ding mit einem der anderen zu einem Paare zu verbinden mit dem Erfolge, dass kein einziges Ding in beiden Mengen ohne Verbindung zu einem Paare bleibt, und auch kein einziges in zwei oder mehreren Paaren vorkommt; und dabei ist es doch andrerseits möglich, dass

die eine dieser Mengen die andere als einen blossen Theil in sich fasst,...'

Volgens Bolzano was er slechts sprake van een schijnbare tegenspraak. Het was volgens hem niet geoorloofd de eigenschappen van *eindige* verzamelingen stilzwijgend van toepassing te verklaren voor *oneindige* verzamelingen. Voor Bolzano reikte het begrip oneindig verder dan alleen de potentiële oneindigheid van Aristoteles, maar het was Cantor die er de uitwerking aan zou geven welke in de wiskundige wereld een doorbraak zou betekenen. Voordat we de denkbeelden van Cantor in meer detail kunnen bespreken, moeten we eerst iets zeggen over het begrip 'verzameling', de 'Menge' waarover Bolzano spreekt.

Verzamelingen

De omgangstaal is niet altijd even duidelijk. In het dagelijks leven is dit niet zo erg omdat we onze bedoelingen met een andere woordkeuze en met gebaren duidelijk kunnen maken. In een wetenschappelijk betoog moeten we zorgvuldiger met ons taalgebruik omspringen om mogelijke misverstanden te vermijden. Ook hier gebruiken we een paar termen zoals 'element' en 'verzameling', die in de wiskunde een heel precieze en abstracte betekenis hebben. Bij 'verzameling' kunnen we denken aan een postzegelverzameling, een hoeveelheid bij elkaar gebrachte dingen van dezelfde soort. Een postzegel die in de verzameling zit heet 'element' van de verzameling. Alle natuurlijke getallen vormen met elkaar de zogenaamde verzameling van de natuurlijke getallen. Omdat die verzameling zo vaak wordt gebruikt heeft men er de speciale notatie N voor bedacht. Zo kunnen we ook spreken van de verzameling van alle even getallen en van die van alle kwadraten

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49,...

In deze twee voorbeelden is het aantal elementen onbeperkt, we kunnen steeds doorgaan. We zeggen weer dat er oneindig veel even getallen en ook oneindig veel kwadraten bestaan.

Verzamelingen kunnen uit eindig veel of uit oneindig veel elementen bestaan. In veel gevallen kunnen we in een concreet geval uit de definitie van de verzameling afleiden wat het is, maar soms stuiten we op een moeilijk wiskundig probleem.

Een eenvoudig voorbeeld is de verzameling van de priemgetallen. In het eerste hoofdstuk hebben we gezien dat die verzameling uit oneindig veel elementen bestaat. Veel moeilijker is de vraag of de verzameling van priemtweelingen oneindig is. Een priemtweeling is per definitie een tweetal priemgetallen die onderling 2 verschillen. De eerste paren van dergelijke tweelingen zijn

3,5   5,7   11,13   17,19   29,31   41,43   59,61   ...

We weten tot op heden niet of die rij almaar voortgezet kan worden. Het zou kunnen zijn dat er een grootste tweeling was, maar bewijzen kunnen we het niet, en de knapste wiskundigen hebben hun tanden erop stukgebeten.

Van belang is ook het begrip 'deelverzameling' van een gegeven verzameling. De definitie ligt voor de hand en we zouden het zelf wel kunnen verzinnen. Een deelverzameling wordt gevormd door elementen van de 'grote' verzameling. Desnoods mogen alle elementen meedoen, in welk geval verzameling en deelverzameling identiek zijn. Aan de andere kant behoeft geen enkel element gebruikt te worden. We zeggen dan dat de deelverzameling leeg is en spreken van de 'lege verzameling'. Gaan we bij voorbeeld uit van een verzameling van de drie elementen a, b en c dan kunnen we volgens het onderstaande lijstje in totaal acht deelverzamelingen vormen:

o	de lege verzameling
a	een verzameling met één element
b	idem
c	idem
a,b	een verzameling met twee elementen
b,c	idem
a,c	idem
a,b,c	de oorspronkelijke verzameling

Dat aantal van acht kunnen we interpreteren als 2^3. Zou de oorspronkelijke verzameling uit n elementen bestaan dan zou het totale aantal deelverzamelingen gelijk zijn aan 2^n.

Georg Cantor

Georg Ferdinand Ludwig Phillip Cantor werd geboren op 3 maart 1845 in Sint Petersburg, het huidige Leningrad. Zijn vader was een welgestelde Deense koopman, misschien van joodse voorouders. Dat laatste werd pas een probleem in de dertiger jaren, toen historische portretten en borstbeelden van geleerden met een niet-Arische afkomst verwijderd werden. Een borstbeeld van Cantor was reeds gesneuveld toen men in 1937 bericht kreeg van de Deense genealogische dienst dat niets wees op een eventuele joodse afkomst. Toen de jonge Georg elf jaar oud was trok de familie naar Frankfurt en spoedig openbaarde zich bij hem het wiskundige talent. Hij was dan ook stellig van plan wiskunde te studeren, maar zijn autoritaire vader zag er niet veel in en stuurde zijn zoon in de richting van een technische loopbaan. Na een paar mislukte jaren werd het toch wiskunde. Via Zürich kwam hij in Berlijn terecht waar hij onder de hoede van onder andere Kronecker, zijn latere opponent, kwam. Zijn eerste belangrijke wetenschappelijke bijdrage is van 1874, waarin Cantor voor het eerst de onaftelbare oneindigheid ter sprake brengt. Deze baanbrekende publikatie en

wat daarna nog verscheen brachten in de wiskundige wereld, en zeker in de kleine Duitse gemeenschap, nogal wat opschudding teweeg. Ze brachten Cantor geen erkenning, men begreep het niet of men wilde het niet begrijpen, Kronecker voorop. Cantor liep een leerstoel aan de beroemde universiteit van Berlijn mis en moest genoegen nemen met een positie aan een derderangs universiteit. En door de meesten werd hij als persona non grata beschouwd.

Het mensenwerk van Kronecker

Leopold Kronecker (1823 - 1891) was in zijn tijd een van de meest invloedrijke Duitse wiskundigen. Hij was afkomstig uit een rijke joodse bankiersfamilie en had op dertigjarige leeftijd al een succesvolle zakelijke carrière achter de rug. Nu gefortuneerd besloot hij zich verder geheel aan de wiskunde te wijden. De aard van zijn werk laat zich afleiden uit zijn bekende en veel geciteerde uitspraak:

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht,
alles andere ist Menschenwerk

Kronecker is een typische vertegenwoordiger van de zogenaamde constructivistische school. Voor hem bestond een wiskundig begrip slechts dan wanneer het in een eindig aantal stappen geconstrueerd kon worden. Als een moderne Aristoteles aanvaardde hij de oneindigheid slechts in zijn potentiële betekenis. Hij was ervan overtuigd dat diepgaande wiskundige eigenschappen uiteindelijk op eenvoudige combinaties van gehele getallen berustten. Met onmeetbare getallen had hij niet veel op, en van de door Cantor geïntroduceerde getallen moest hij helemaal niets hebben. Kronecker heeft in bepaalde opzichten wel 'zuiverend' op de beoefening van de wiskunde gewerkt, maar als mens was hij nogal autoritair en star. Op zijn aanwijzingen werden hoogleraarsposten vervuld en werden publikaties bevorderd of tegengehouden. Cantor zou het tot zijn schade ondervinden.

Aftelbaar oneindig

Aanvankelijk volgde Cantor nog het voetspoor van zijn leermeester Kronecker en legde hij de verzameling van de natuurlijke getallen ten grondslag aan zijn verdere beschouwingen. Vooral hield hij zich bezig met de 'grootte' van verzamelingen. Voor een verzameling met eindig veel elementen was dat niet anders dan het aantal elementen van die verzameling, maar wat te zeggen van een verzameling met oneindig veel elementen. Men had altijd gedacht dat er niet meer van te vertellen was dan dat zo'n verzameling 'oneindig' was, en daarmee uit. Maar Cantor wist duidelijk te maken dat er meer soorten van oneindigheid bestonden, tot verrassing en verbazing van zijn tijdgenoten, en tot ergernis van 'conservatie-

ven' als Kronecker die er eenvoudigweg niet aan wilden. De eerste stap van Cantor was een generalisatie van het begrip gelijkwaardigheid van verzamelingen, een nadere uitwerking van de denkbeelden van Bolzano. Zijn opvatting daarover doet denken aan de manier waarop in lang vervlogen tijden primitieve veehouders de omvang van hun kudden vergeleken. Tellen konden ze niet, misschien één, twee, drie, veel. Maar twee kudden konden ze vergelijken door telkens een dier uit de ene kudde naast een dier uit de andere kudde te zetten. In de wiskunde heet dat een 1 - 1 toevoeging. Wanneer er geen dieren van de ene kudde meer waren maar nog wel van de andere, wist men welke de grootste of de kleinste was. Vond elk dier van de ene kudde een partner dan waren de hoeveelheden 'even groot'.

Cantor paste dit beginsel toe op de verzameling van de natuurlijke getallen en bij voorbeeld op de verzameling van alle kwadraten. Hieronder laten we zien hoe de elementen van de verzamelingen aan elkaar toegevoegd zijn:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ...
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, ...

Zo gaat het almaar door. Tegelijk met het aftellen van de natuurlijke getallen tellen we de kwadraten af. Er is duidelijk sprake van een wederzijdse toevoeging waarbij elk element aan de beurt komt, een zogenaamde 1 - 1 toevoeging. De verzamelingen zijn dus even groot. Alle verzamelingen die op zo'n manier even groot zijn als de verzameling van de natuurlijke getallen noemt Cantor *aftelbaar oneindig*. Dat is de eenvoudigste soort oneindigheid, want later zal blijken dat er getallenverzamelingen bestaan die wel oneindig maar niet aftelbaar oneindig zijn.

De methode om twee verzamelingen elementsgewijs te vergelijken lijkt eenvoudig, maar in het gegeven voorbeeld worden we meteen al geconfronteerd met een vreemde situatie. De verzameling van de kwadraten maakt namelijk deel uit van de verzameling van de natuurlijke getallen, en we zijn gewend aan de situatie dat een deel kleiner is dan het geheel. Bovendien zijn de kwadraten in de rij van de natuurlijke getallen nogal spaarzaam vertegenwoordigd.

De constatering dat een onderdeel van een verzameling, een zogenaamde deelverzameling, even groot kon zijn als de gehele verzameling was voor sommigen aanleiding om de ideeën van Cantor als te bizar te verwerpen. Anderzijds betekent aanvaarding van Cantors definitie dat we de uitspraak 'een deel is niet even groot als het geheel' voor oneindige verzamelingen moeten verwerpen, en dat doen we dus. We kunnen nu gemakkelijk nog meer aftelbaar oneindige verzamelingen maken, alle derde machten bij voorbeeld

1, 8, 27, 64, 125, 216,...

of alle priemgetallen

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...

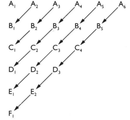
We kunnen ook gemakkelijk vaststellen dat de combinatie van twee aftelbare verzamelingen A en B, de zogenaamde vereniging, weer een aftelbare verzameling is. Het telprincipe is eenvoudig. Noteren we de elementen van A als $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en die van B als $b_1, b_2, b_3, \ldots$ dan tellen we de elementen van de vereniging van A en B eenvoudig af als

$a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots$

Moeten er meer verzamelingen A, B, C, D,... samengesteld worden dan kunnen we de telling ook op een wat andere wijze uitvoeren. We volgen dan de zogenaamde diagonaalmethode overeenkomstig het schema van figuur 2.1

$a_1, a_2, b_1, a_3, b_2, c_1, a_4, a_3, c_2, d_1, \ldots$

Figuur 2.1 Een diagonale manier van tellen.



Deze wijze van tellen kan ook gebruikt worden wanneer we aftelbaar veel aftelbaar oneindige verzamelingen combineren.

Dat principe kunnen we mooi gebruiken om te laten zien dat alle breuken een aftelbaar oneindige verzameling vormen. Gemakshalve beperken we ons tot de breuken tussen 0 en 1. Bij de telmethode letten we niet op de volgorde naar grootte, die zogenaamde ordening speelt bij het tellen geen enkele rol. We kunnen ze dan op de volgende wijze aftellen

1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 1/6,...

We werken dus heel systematisch alle breuken af met dezelfde noemer en daarna gaan we verder met die met een grotere noemer. Daarbij vereenvoudigen we de breuken telkens tot hun eenvoudigste vorm om herhalingen te vermijden. Zo nemen we 2/4 niet mee omdat 2/4=1/2, en komt na 1/6 de breuk 5/6. Die verzameling is

dus duidelijk aftelbaar. Op overeenkomstige wijze geven de breuken in de intervallen $(-1,0), (1,2), (-1,-2), (2,3), (-2,-3),\ldots$ aftelbare verzamelingen. Er zijn aftelbaar veel van die intervallen en het totaal, alle breuken of rationale getallen, vormt een aftelbaar oneindige verzameling (zie figuur 2.2).

Figuur 2.2 Het aftellen van de rationale getallen.

0 1 -1 1/2 2 -1/2 -2 1/3 3 -1/3 -3 2/3 3/2 -2/3 -3/2 1/4 4 -1/4 -4 3/4 ...

Het hotel van Hilbert

Aan het begin van deze eeuw werd de wiskunde gedomineerd door twee wiskundigen, David Hilbert (1862-1943) en L.E.J. Brouwer. Beiden maakten zich druk over de grondslagen van de wiskunde en... over elkaar. Het waren geen gemakkelijke heren. Brouwer placht als een moderne Kronecker zijn tegenstanders in kleurrijke taal af te schilderen. Hilbert stelde zich vierkant achter de denkbeelden van Cantor en zag het als zijn taak de hele wiskunde op axiomatische wijze te funderen. Zijn naam leeft voort in een aardige anekdote welke het begrip aftelbaar oneindig moet illustreren. Bij een gewoon hotel kan het voorkomen dat een binnenkomende gast alle kamers bezet vindt en zijn heil elders moet zoeken. Bij het hotel van Hilbert, dat aftelbaar oneindig veel kamers bevat, bestaat dat probleem niet. Voor elke nieuwe gast is wel een kamer te vinden. Uiteraard hebben alle kamers een nummer: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,... tot in het oneindige. Laten we uitgaan van de meest ongunstige situatie dat alle kamers bezet zijn. Er meldt zich een nieuwe gast. De receptionist, ongetwijfeld een wiskundige en leerling van Hilbert, geeft iedere hotelgast de opdracht te verhuizen naar de volgende kamer. Het volgende moment is de oneindig lange gang gevuld met mensen die hun spullen naar de volgende kamer brengen, kamer 1 komt vrij en de nieuwe gast kan erin trekken. Zou er een bus met honderd reizigers arriveren dan is er evenmin een probleem, want iedereen moet dan verhuizen naar de kamer waarvan het rangnummer 100 hoger is. Nu komt er zelfs een supertrein met (aftelbaar) oneindig veel passagiers. Ook daarmee weet de receptionist raad. De gasten dienen nu te verhuizen naar de kamers waarvan het rangnummer het dubbele is van hun oorspronkelijke kamer. De bewoner van kamer 1 gaat dus naar kamer 2, die van 2 gaat naar kamer 4, de gast van kamer 3 gaat naar nummer 6 enzovoort tot in het oneindige. Met deze truc komen alle oneven kamers vrij ten gerieve van de oneindige rij wachtenden die ten slotte allemaal aan de beurt komen.

Hogere oneindigheden

Een mijlpaal in de geschiedenis van de wiskunde was Cantors ontdekking dat niet alle uit oneindig veel elementen bestaande ver-

zamelingen aftelbaar oneindig waren. Cantor gaf als voorbeeld de verzameling van alle punten op een rechte lijn. Men zou misschien kunnen denken dat dat iets te maken heeft met het feit dat de rechte lijn zich aan twee zijden naar oneindig uitstrekt, maar dat is niet het geval. Ook de punten van een willekeurig begrensd lijnstuk, hoe klein ook, vormen een niet-aftelbaar oneindige verzameling. Wanneer we de rechte lijn als getallenlijn opvatten kan met elk punt een getal geïdentificeerd worden. De punten van een lijnstuk kunnen dan opgevat worden als de getallen tussen 0 en 1. De bewering van Cantor komt dan neer op de uitspraak dat de verzameling van alle getallen tussen 0 en 1 niet aftelbaar is. In de volgende paragraaf komen we erop terug.

Cantor duidde de oneindigheid van de getallen, de punten op de getallenlijn, aan als het Continuum, en hij reserveerde er de letter *C* voor. Dat waren al twee vormen van oneindigheid, maar Cantor ontwierp nog meer vormen van oneindigheid. Zijn ideeën zijn helaas moeilijk te volgen voor degenen die niet vertrouwd zijn met de subtiele redenaties welke bij axiomatische beschouwingen gebruikelijk zijn. We beperken ons daarom tot een enkel karakteristiek facet. Hierboven hebben we gesproken over de deelverzamelingen van een gegeven verzameling en hebben we voor een verzameling van drie elementen laten zien dat er acht, dat wil zeggen 2^3, deelverzamelingen gevormd kunnen worden. Cantor paste dit beginsel toe op een oneindige verzameling V en verkreeg daarmee een nieuwe verzameling W. Zou bij voorbeeld V de verzameling van alle natuurlijke getallen zijn, dan zou W als element onder andere de verzameling van alle kwadraten bevatten. Cantor vergeleek W met V op de hem bekende wijze en constateerde dat W een hogere 'Mächtigkeit' bezat.

Voor de verschillende soorten oneindigheden introduceerde Cantor een speciale notatie, de Hebreeuwse letter Aleph, al of niet voorzien van indices. Voor die keuze was er een eenvoudige reden, de gewone letters van het Romaanse en Griekse schrift werden te veel gebruikt of hadden al een vaste betekenis en de Aleph was voorhanden op de meeste Duitse schrijfmachines. Bovendien was de Aleph als eerste letter van een alfabet een suggestief symbool voor dat wat het eerste na eindig komt. Een aftelbaar oneindige verzameling werd aldus gekenmerkt door de Aleph met de index 0.

De onmeetbare getallen kunnen niet afgeteld worden

Veel van Cantors beschouwingen zijn voor niet-deskundigen moeilijk te volgen, maar zijn bewijs van de onaftelbaarheid van de onmeetbare getallen is wellicht voor niet-ingewijden goed te begrijpen. Eigenlijk is het gevolgde principe erg eenvoudig. We nemen met Cantor aan dat de onmeetbare getallen wel afgeteld zouden kunnen worden, en dat we dan over een tabel daarvan zouden beschikken. Volgens Cantor kan dan een getal geconstrueerd worden dat in geen enkele rij voorkomt. Dat kan natuurlijk niet, want

elk getal zou ergens in de tabel te vinden moeten zijn. Die paradoxale situatie kan alleen opgeheven worden door het uitgangspunt te verwerpen. De conclusie is dus dat de oneindige hoeveelheid onmeetbare getallen niet af te tellen valt.

We gaan nog een beetje op de techniek van Cantors bewijs in. Gemakshalve beperken we ons daarbij tot de onmeetbare getallen tussen 0 en 1. Deze kunnen we ons voorstellen als oneindig voortlopende decimale breuken. Het begin van de hypothetische tabel zou eruit kunnen zien als

$\cdot a_1a_2a_3a_4a_5\ldots$
$\cdot b_1b_2b_3b_4b_5\ldots$
$\cdot c_1c_2c_3c_4c_5\ldots$
$\cdot d_1d_2d_3d_4d_5\ldots$
$\ldots$

Het nieuw te vormen getal x heeft net zo'n decimale ontwikkeling $\cdot x_1x_2x_3x_4x_5\ldots$ De decimalen van dat getal kiezen we achtereenvolgens heel slim met de volgende richtlijnen.

Zorg dat x_1 verschilt van a_1, dat x_2 verschilt van b_2, dat x_3 verschilt van c_3 enzovoort. Kortom, de n-de decimaal van x moet verschillen van de n-de decimaal van het n-de getal in de tabel. In gedachten kunnen we eindeloos doorgaan. Ten slotte is er een getal bepaald dat verschilt van welk getal ook in de tabel. Er zijn nog een paar kleine technische details, maar die laten we maar onbesproken. Het bewijsprincipe zal nu wel duidelijk zijn.

Geloof en ongeloof

We hadden al gezegd dat de tijdgenoten van Cantor niet allen even enthousiast waren. Kronecker was helemaal furieus, zag Cantor als een bederver van de wiskunde tegen wie de strengste maatregelen genomen dienden te worden. Cantor, die toch al een zwakke psychische constitutie had, trok zich dat erg aan en moest regelmatig in een psychiatrische instelling worden opgenomen. David Hilbert, omstreeks 1900 de meest gezaghebbende wiskundige ter wereld, toonde zich echter een warm voorstander van Cantors ideeën, 'de meest bewonderenswaardige vruchten van de wiskundige geest en een van de hoogste scheppingen van het menselijk intellect'. Weliswaar hadden enkelen gewezen op tegenstrijdigheden in de door Cantor ontwikkelde theorie van de verzamelingen, maar Hilbert sprak openlijk uit dat 'niemand ons zou verdrijven uit het paradijs dat Cantor geschapen had', een uitspraak met de kracht van een geloofsbelijdenis.

In 1907 verraste een jonge Nederlandse wiskundige de wetenschappelijke wereld met een op uitdagende toon geschreven proefschrift. Zijn dertiende stelling luidde

Cantors tweede getalklasse bestaat niet

In minder formele taal: 'Weg met alle Alephs, en weg met Cantor en Hilbert.' Zijn naam was Luitzen Egbertus Jan Brouwer, geboren op 27 februari 1881 te Overschie uit Friese ouders. Brouwer kan worden beschouwd als een der belangrijkste wiskundigen van zijn tijd. Zijn bijdragen aan de wiskunde zijn uiterst belangrijk, zijn meer filosofisch getinte opvattingen werden en worden niet door allen gedeeld. In zijn verzet tegen Cantors denkbeelden stond hij dan ook vrijwel alleen. Maar dank zij Brouwer hebben we er wel beter over leren nadenken. In de hedendaagse wiskunde zijn Cantors oneindigheden niet meer weg te denken.

3 BREUKEN MET GEBREKEN

Een gewone breuk of *rationaal getal* is de verhouding van twee natuurlijke getallen, dat is al zo sinds de Oudheid. Toch had men aanvankelijk moeite om ze op een geschikte manier te noteren. Wij schrijven gewoon 5/18 en iedereen weet wat daarmee wordt bedoeld. De Egyptenaren hadden alleen een notatie voor breuken met teller 1, zogenaamde stambreuken. Weliswaar hadden ze nog een speciale schrijfwijze voor 2/3, maar met 3/4 begonnen de problemen. Ze schreven daarvoor 1/2 + 1/4, wat op hetzelfde neerkomt. Veel van hun technisch rekenwerk bestond erin alles tot stambreuken te herleiden. In plaats van 5/18 schreven ze 1/6 + 1/9.

De notatie van de Grieken was beter, maar in onze ogen nog erg onhandig, en ver verwijderd van de moderne decimale schrijfwijze. De Grieken gebruikten hun letters ook als getallen: met de alfa tot aan de theta bedoelden ze de getallen 1 tot 9. Kenners van het Griekse alfabet die dit even willen controleren, zullen wel bij 8 blijven steken, maar de Grieken hadden speciaal voor getallen nog een paar in onbruik geraakte letters gereserveerd. De wau, onze letter *f*, gebruikten ze aldus voor de 6. Met het volgende negental, de jota tot aan de koppa, onze letter *q*, bedoelden ze de tientallen, en zo ging het door tot aan 900, de na de omega komende sampi. Daarna begonnen ze gewoon van voren af aan met toevoeging van accenttekens.

De decimale notatie

Het waren de Indiërs, uitvinders van de nul, en de Arabieren die de grondslagen legden voor onze moderne notatie met de zogenaamde Arabische cijfers. Het rekenen met decimale breuken werd pas ingevoerd door Simon Stevin (1548-1620) uit Brugge, die als genie-officier in dienst was van prins Maurits. Meteen openbaarde zich daarbij een vervelende complicatie. Om een eenvoudig getal als 1/3 in de vorm van een decimale breuk te schrijven hebben we eigenlijk oneindig veel decimalen nodig:

1/3=.333 333 333 333 333 3···

Met een breuk als 1/25 hebben we die moeilijkheid niet, immers 1/25=.04 precies in twee decimalen achter de komma. Is dat nu een gebrek van de decimale notatie? In theorie wel, maar in de praktijk, waarbij we tevreden kunnen zijn met een beperkte nauwkeurigheid, valt het wel mee. In een computer werken we in principe met getallen die geen grotere nauwkeurigheid toelaten dan twaalf decimalen. Door die getallen op handige wijze te combineren kan overigens een hogere precisie bereikt worden, maar eigenlijk is dat alleen een kleine verschuiving van de grens van nauwkeurigheid. Bij elke bewerking met onnauwkeurige getallen maken we noodgedwongen kleine foutjes. Wanneer we ingewikkelde en langdurige berekeningen uitvoeren kunnen de telkens gemaakte onnauwkeurigheden behoorlijk accumuleren, zo erg soms dat de ten slotte verkregen resultaten op toeval lijken te berusten. We komen er later nog op terug wanneer we het thema 'chaos' gaan bespreken.

De vraag rijst of de decimale notatie wel zo gelukkig was. We kunnen vrij gemakkelijk inzien dat we altijd in moeilijkheden komen ongeacht welk talstelsel we nemen. Een decimale breuk die afbreekt kunnen we altijd schrijven als een gewone breuk waarbij de noemer een macht van tien is. Zo is .3125 gelijk aan 3125/10 000 hetgeen we kunnen vereenvoudigen tot 5/16. In de noemer bevinden zich geen andere priemfactoren dan die welke deelbaar zijn op 10, dus 2 en 5. Omgekeerd kunnen alleen gewone breuken, waarbij de noemer geen andere factoren bevat, geschreven worden in een afbrekende decimale breuk. Zouden we het bekende zestigtallige talstelsel gebruiken, een erfenis uit de Oudheid die nog voortleeft in de goniometrie en onze tijdmeting, dan zouden nog meer breuken tot een afbrekende reeks wijzergetallen – om taalkundige redenen mogen we niet meer spreken van decimalen – leiden. Met een breuk als 1/3 is er geen probleem meer, maar met 1/7 blijft het nog misgaan. We houden ons dus maar aan het vertrouwde decimale systeem dat niet beter of slechter is dan welk ander talstelsel ook.

Periodieke decimale breuken

Het ziet ernaar uit dat we bij het herleiden van gewone tot decimale breuken niet ontkomen aan het oneindig ver doorgaan. Gelukkig gaat dat op een nogal overzichtelijke wijze. Het blijkt namelijk dat hetzelfde patroon van decimalen zich almaar herhaalt. Dat zien we al bij de breuk 1/3 waarbij een enkele decimaal telkens herhaald wordt. We zeggen in dat geval dat de ontwikkeling periodiek is met de periode 1. Nog een voorbeeld:

1/7=.142857 142857 142857...

We kunnen natuurlijk niet alle decimalen opschrijven, maar we kennen ze wel allemaal en het kost weinig moeite om bij voorbeeld te zeggen wat de miljoenste decimaal is. De decimale notatie heeft

voordelen wanneer we twee getallen onderling willen vergelijken. Met een oogopslag zien we welke de grootste is. Bij getallen als 127/144 en 112/127 kost dat wel enig gereken. Nu is $127 \times 127 = 16\ 129$ en $112 \times 144 = 16\ 128$ zodat het tweede getal het grootste is. De decimale notatie

127/144=.881 898...
112/127=.881 944...

geeft meteen uitsluitsel.

Onmeetbare getallen

De Grieken ontdekten tot hun niet geringe schrik dat er meetkundige verhoudingen waren die niet uit te drukken waren als gewone breuken, verhoudingen van natuurlijke getallen. Het liep bij voorbeeld al mis bij de verhouding $\sqrt{2}$ van de diagonaal van een vierkant tot de zijde. Laten we eens veronderstellen dat $\sqrt{2}$ gelijk is aan de onvereenvoudigbare breuk m/n, dan zou 2 gelijk moeten zijn aan het kwadraat van die breuk m^2/n^2. Dan geldt dus de volgende gelijkheid van twee natuurlijke getallen

$$2 \times n \times n = m \times m$$

Links en rechts tellen we het aantal factoren 2. Dat is links oneven en rechts even, kennelijk een onmogelijkheid. Zoals we weten dachten de Grieken sterk meetkundig. Het begrip $\sqrt{2}$ was voor hen de meetkundige constructie van een vierkant waarvan de oppervlakte tweemaal zo groot was als die van een gegeven vierkant. De constructie afgebeeld in figuur 3.1 is uiterst eenvoudig. Maar in de Griekse getallenwereld was er geen plaats voor.

Figuur 3.1 De constructie van $\sqrt{2}$.

De ontdekking van een dergelijk 'onbestaanbaar' getal wordt toegeschreven aan Pythagoras of diens medestanders. Volgens een legende was men bang dat de ontdekking onder de bevolking onrust zou brengen met mogelijk politieke gevolgen. Men bewaarde het dus als een zorgvuldig gekoesterd geheim, totdat een zekere Hippasos uit de school klapte. Voor zijn verraad werd hij prompt gestraft en in de Middellandse Zee geworpen.

Wanneer we trachten $\sqrt{2}$ of een soortgelijk getal in een decimale breuk te ontwikkelen, zien we geen zich herhalend patroon meer, maar een verwarrende rij decimalen. Voorspellingen kunnen we niet meer maken, en het berekenen van bij voorbeeld de miljoenste decimaal is geen geringe wiskundige opgave. Natuurlijk kunnen we $\sqrt{2}$ wel benaderen, hetzij met een decimale breuk hetzij als een gewone breuk m/n. Trouwens elk onmeetbaar getal kan willekeurig precies benaderd worden door de decimale ontwikkeling ergens af te breken. De benadering, natuurlijk een gewone breuk, is dan altijd te klein. Voegen we aan de laatste decimaal een eenheid toe dan vinden we een benadering die te groot is. De fout die we in

elk van de gevallen maken is dan altijd kleiner dan een eenheid van de laatst gebruikte decimaal.

Een snelle benadering van een vierkantswortel

We hebben zojuist gezien dat we van $\sqrt{2}$ een rationale benadering, dus een benadering door een gewone breuk, kunnen maken door de decimale ontwikkeling ergens af te breken. Dat zelfde geldt natuurlijk voor elk onmeetbaar getal. Het nadeel van de methode is dat we dan eerst over een stuk van de decimale ontwikkeling moeten kunnen beschikken. De afleiding daarvan is vaak een bewerkelijke zaak, maar gelukkig zijn er voor onmeetbare getallen van een bijzondere soort, vierkantswortels bij voorbeeld, betere methoden beschikbaar. Om de vierkantswortel van een willekeurig (positief) getal a te bepalen handelen we als volgt. We beginnen met een willekeurige benadering die we x noemen. Wanneer we a door x delen, vinden we meteen een tweede benadering y waarvoor we a/x mogen schrijven. We hebben dus $x \times y = a$. Wanneer x aan de kleine kant is, is y aan de grote kant. Het ligt voor de hand om het gemiddelde van x en y, dat wil zeggen $(x+y)/2$, te kiezen als een mogelijk wat betere benadering van $\sqrt{a}$. En zijn we niet tevreden dan herhalen we de hele bewerking nog eens. Deze methode is al in de klassieke Oudheid bedacht en met succes beproefd. Nu weten we dat de methode zeer doeltreffend is en met slechts een paar stappen een ongelooflijke precisie oplevert. We kunnen de berekening in de vorm van een iteratief proces brengen. Itereren betekent almaar herhalen, in gedachten oneindig vaak:

$$x_n + 1 = (x_n + a/x_n)/2$$

waarbij n achtereenvolgens de waarden 0, 1, 2, 3,... aanneemt. De beginwaarde x_0 is een allereerste benadering van $\sqrt{a}$. Om te zien hoe het werkt nemen we voor a de waarde 4 en voor x_0 de waarde 1. Het resultaat na oneindig veel stappen moet dan $\sqrt{4}$, en dus 2, zijn. We zijn dan in staat de onderweg verkregen benaderingen op eenvoudige wijze te vergelijken met het exacte antwoord. Eventueel met behulp van een computer vinden we dan achtereenvolgens

$x_0 = 1$
$x_1 = 2.5$
$x_2 = 2.05$
$x_3 = 2.000\ 609\ 756\ 097\ 561$
$x_4 = 2.000\ 000\ 092\ 922\ 295$
$x_5 = 2.000\ 000\ 000\ 000\ 002$

Hoewel we begonnen zijn met een waarde die nauwelijks een benadering genoemd kan worden, hebben we toch in slechts enkele stappen reeds een enorme nauwkeurigheid bereikt. Een kenmerk van dit proces is dat het aantal correcte decimalen bij elke volgende

stap ongeveer wordt verdubbeld. De waarde van *a* maakt bij deze methode niets uit, en elke vierkantswortel kan op deze wijze efficiënt en nauwkeurig worden berekend.

Pi

Wellicht het beroemdste en tegelijk het meest mysterieuze onmeetbare getal is π, de verhouding van de omtrek van een cirkel tot de middellijn. Hieronder geven we de decimale ontwikkeling van π in 32 decimalen achter de komma:

π=3.141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 50...

In de klassieke Oudheid waren goede benaderingen bekend ten gerieve van vooral de bouwmeesters. De Egyptenaren werkten omstreeks 1500 v. Chr. met de waarde $(16/9)^2$ wat neerkomt op 3.1605... als decimale breuk. Archimedes gebruikte al de bij ons nog steeds populaire benadering 22/7 of 3.1428... Een belangrijke verbetering is afkomstig uit China waar Zu Chongzhi (430-510) de benadering 355/113 of 3.141 593 wist af te leiden. Daarna zou het nog tien eeuwen duren alvorens iets nog beters kon worden gevonden. Dank zij de ontwikkelingen van de analyse of calculus door pioniers als Isaac Newton en Leonard Euler konden met behulp van steeds vernuftiger methoden betere benaderingen van π gevonden worden. Het bleef voorlopig natuurlijk handwerk, maar wel slaagde Euler erin met pen en papier binnen een uur twintig decimalen van π te berekenen. Een rekenwonder als Johann Dase (1824-1861) slaagde erin tweehonderd decimalen uit te rekenen in een tijdsbestek van twee maanden.

De Duitse wiskundige Johann Heinrich Lambert (1728-1777) bewees als eerste dat π inderdaad een onmeetbaar getal was, zodat het bepalen van verdere decimalen in de ontwikkeling van π geen zinloze arbeid was. Een eeuw later, en wel in 1882 werd door zijn landgenoot Ferdinand Lindemann (1852-1939) bewezen dat π ook transcendent was, een speciaal soort onmeetbaar getal dat niet uit natuurlijke getallen kon worden afgeleid via een hogeremachtsvergelijking. Dat resultaat betekende onder meer dat π ook niet uitgedrukt kon worden met een formule die vierkantswortels van natuurlijke getallen bevatte. Zou dat laatste het geval zijn geweest dan zou een lijnstuk van de lengte π op meetkundige wijze uit een eenheidslijnstuk kunnen worden afgeleid met slechts toepassing van passer en liniaal. Het beroemde probleem van de 'kwadratuur van de cirkel' was daardoor een wiskundige onmogelijkheid geworden.

We kunnen met de decimale ontwikkeling van π gerust nog even doorgaan. We zijn er in elk geval zeker van dat we met elke volgende decimaal telkens iets nieuws zullen vinden. Of we er veel aan zullen hebben is een vraag, waarbij wiskundigen soms hun twijfels hebben. In 1853 publiceerde William Shanks een berekening van

π in 707 decimalen. Wiskundigen probeerden er iets mee te doen door in die lange rij te zoeken naar merkwaardigheden. Het viel een statisticus op dat het cijfer 7 relatief weinig voorkwam. Zou het cijfer 7 misschien op den duur helemaal niet meer voorkomen? Het lijkt niet zo waarschijnlijk, maar toch, je kunt nooit weten.

Nu moet men nooit wetenschappelijke resultaten van anderen kritiekloos aanvaarden, het zou kunnen zijn dat Shanks zich verrekend had en dat de 7 toch geen uitzonderlijke plaats innam. En inderdaad, in 1945 vond Ferguson met behulp van een tafelrekenmachine dat Shanks zich flink had verrekend. Men zou zelfs kunnen denken dat Shanks zijn oorspronkelijke berekening nog mooier heeft willen maken door er lukraak nog een paar honderd gefingeerde decimalen aan toe te voegen. Het is een aardige uitdaging om zelf eens zeg tweehonderd willekeurige cijfers op te schrijven. Wanneer het resultaat statistisch wordt bewerkt zal wel blijken dat sommige cijfers veel vaker voorkomen dan andere en dat in de regel een 7, het bekende geluksgetal, een uitzonderingspositie inneemt. Met de moderne hedendaagse computers is het, relatief gesproken, een kleinigheid om π in vele miljoenen decimalen te berekenen. Voor zover bekend zijn er geen indicaties dat zich in die rij zonderlinge wetmatigheden voordoen, maar ook vele miljoenen betekenen dan ook niets op de oneindigheid.

Kettingbreuken

Kettingbreuken vormen een ideale manier om onmeetbare getallen te benaderen. De grootste Nederlandse geleerde uit de Gouden Eeuw, Christiaan Huygens (1629-1695), evenknie van Newton, paste de kettingbreuken toe bij de constructie van astronomische uurwerken. Het probleem is namelijk om met een systeem van tandwielen de in ons zonnestelsel aanwezige onmeetbare verhoudingen als het aantal dagen in een astronomisch jaar, op optimale wijze te benaderen in een mechanisch systeem van in elkaar grijpende raderen. Om praktische redenen kan men niet te veel tandwielen gebruiken en het aantal tanden moet ook beperkt blijven.

De grondslagen van de theorie van de kettingbreuken gaat weer terug tot de Griekse Oudheid. Wat is een kettingbreuk? Op het eerste gezicht een wat vreemde notatie voor een getal. Laten we beginnen met een voorbeeld. Om de breuk 87/37 als een kettingbreuk te schrijven, volgen we een reeds door Euclides behandelde rekenwijze, een zogenaamd algoritme, om de GGD, de grootste gemene deler, van 87 en 37 te vinden. Dat gaat als volgt:

$$87 = 2 \times 37 + 13$$
$$37 = 2 \times 13 + 11$$
$$13 = 1 \times 11 + 2$$
$$2 = 2 \times 1$$

De GGD is dus 1, maar dat wisten we misschien al. De rij van de delers 2, 2, 1, 5, 2 vormt de zogenaamde kettingbreuk, en we schrijven

$87/37=[2,2,1,5,2]$

een compacte notatie voor de samengestelde breuk

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2}}}}$$

Wanneer we bij een gegeven kettingbreuk de getallenrij voortijdig afbreken, krijgen we natuurlijk niet het oorspronkelijke getal terug maar wel een benadering ervan. We kunnen bewijzen dat zo'n benadering heel erg goed en bruikbaar is. Voor het gegeven voorbeeld kunnen we dat illustreren door naar de volgende afbrekingen te kijken:

$[2]=2$
$[2,2]=2+1/2=5/2$
$[2,2,1]=2+1/(2+1/1)=7/3$
$[2,2,1,5]=2+1/(2+1/(1+1/5))=40/17$
$[2,2,1,5,2]=2+1/(2+1/(1+1/(5+1/2)))=87/37$

Om de nauwkeurigheid van de benaderde waarde 40/17 te controleren, maken we even een klein sommetje:

$87/37-40/17=(87\times 17-37\times 40)/37\times 17=(1479-1480)/37\times 17=-1/629$

inderdaad een geringe afwijking. In het algemeen geldt voor afgebroken kettingbreuken dat er geen betere benadering bestaat waarbij de noemer kleiner is.

Voor het getal π kan een kettingbreuk afgeleid worden. Omdat π een onmeetbaar getal is, loopt die kettingbreuk oneindig ver door. Het begin is

$\pi=[3,7,15,1,29,29,1,1,2,\ldots]$

Zojuist hebben we gezien dat het afbreken van een kettingbreuk tot een goede benadering leidt. En inderdaad, stoppen we bij het tweede getal dan krijgen we al meteen de bekende benadering

$\pi\approx 3+1/7=22/7$

Nemen we ook de 15 en de 1 in de kettingbreuk mee dan vinden we eerst de benadering 333/106 en vervolgens 355/113. De laatste ook heel bekende benadering is al heel nauwkeurig:

$$\pi \approx [3,7,15,1]=355/113=3.141\ 592\ 9\ldots$$

Een betere benadering met kleinere teller en noemer is er dus niet. De eerstvolgende benadering is 103 993/33 102, meer een curiositeit.

Het gulden snede getal

We hebben gezien dat de decimale ontwikkeling van een onmeetbaar getal in het algemeen uiterst onregelmatig is. Trouwens, een decimale breuk met een zich telkens herhalend patroon is ook een meetbaar getal. Maar hoe zou het met een periodieke kettingbreuk staan? Laten we eens proberen daar op experimentele wijze achter te komen, en laten we dan het eenvoudigst denkbare geval bekijken waarbij de kettingbreukontwikkeling slechts een herhaling van het cijfer 1 is.

We beschouwen dus het getal

$$a=[1,1,1,1,1,\ldots]$$

of uitgeschreven

$$a=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

De notatie maakt duidelijk dat het getal a voldoet aan de betrekking

$$a=1+1/a$$

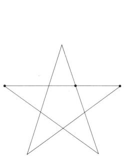
ofwel

$$a^2-a-1=0$$

Dit is een vierkantsvergelijking die twee wortels heeft, een positieve en een negatieve. Uiteraard is alleen de positieve wortel van toepassing, en dat is volgens de bekende schoolformule

$$a=(1+\sqrt{5})/2=1.6180\ldots$$

een bekend getal dat we herkennen als het *gulden snede* getal (zie figuur 3.2).



Figuur 3.2 De gulden snede in een pentagram.

Dat getal, welbekend in de getallenmystiek en in de meetkunde,

is dus werkelijk heel bijzonder: de kettingbreukontwikkeling van dat getal bestaat uit oneindig veel enen. In de theorie van de kettingbreuken is dit getal het eenvoudigste lid van een grote familie. Bewezen kan worden dat een kettingbreuk met een zich herhalend patroon altijd een oplossing is van een vierkantsvergelijking met geheeltallige coëfficiënten.

Wat is een onmeetbaar getal?

We hebben al enige malen gesproken over onmeetbare getallen, er voorbeelden van gegeven als π en $\sqrt{2}$, en met Cantor laten zien dat ze een onaftelbaar oneindige hoeveelheid vormen. Maar wat zijn het eigenlijk voor getallen? Vroeger placht men te zeggen dat een onmeetbaar, of irrationaal, getal een getal was dat niet meetbaar was. Maar dat is een pseudo-definitie, want dan zouden we het algemenere begrip 'getal' al eerder gedefinieerd moeten hebben. We zouden ons kunnen voorstellen dat een onmeetbaar getal bepaald zou kunnen worden als een oneindig voortlopende niet-repeterende breuk. Er zijn dan een paar praktische voordelen. Met een decimale ontwikkeling kunnen de getallen gemakkelijk geordend en vergeleken worden. Het is ook mogelijk een gegeven onmeetbaar getal in elke verlangde precisie door een meetbaar getal te benaderen alleen door de ontwikkeling ergens te stoppen. In zekere zin is het onmeetbare getal de limiet van de rij meetbare benaderingen.

We stellen ons voor, zoals Cantor deed, dat we alleen meetbare getallen kennen, en dat we alleen met hun hulp een nieuw soort getal, $\sqrt{2}$ bij voorbeeld, moeten definiëren. Inderdaad gaat dat met een rij van steeds betere benaderingen, zoals verkregen door het afbreken van een oneindig voortlopende decimale breuk. Op het eerste gezicht heeft die methode het bezwaar dat we het begrip 'limiet van een rij getallen' niet kunnen hanteren. Immers, die limiet, een onmeetbaar getal, bestaat niet zolang de onmeetbare getallen nog niet gedefinieerd zijn. Maar Cantor heeft een uitweg gevonden met de invoering van het begrip 'fundamentaalrij'. In feite is dat een rij die een limiet heeft, maar op een geraffineerde wijze wist Cantor het limietbegrip te omzeilen. Men zou kunnen zeggen dat Cantor met een limietrij werkt zonder van de limiet van de rij gebruik te maken.

Cantors theorie van het onmeetbare getal is nu een fundament van de moderne wiskunde geworden. Het is verplichte leerstof voor elke student die de wiskunde serieus neemt.

4 LIMIETEN, RIJEN EN REEKSEN

In het eerste hoofdstuk hebben we gezien hoeveel moeite de Grieken hadden met begrippen als oneindigheid, snelheid en continuïteit. Maar dat wil niet zeggen dat ze er in de praktijk niet mee konden rekenen. Archimedes van Syracuse, een geleerde die we alleen maar kunnen vergelijken met Newton, was zijn tijd ver vooruit. De facto schiep hij de grondslagen van de mechanica en de differentiaal- en integraalrekening. Integraalrekening zou men kunnen opvatten als het optellen van oneindig veel oneindig kleine grootheden, van filosofisch standpunt uit bezien een griezelige zaak. Maar Archimedes kon er aardig mee overweg, net als Newton vele eeuwen later, maar zonder dat ze zich veel aantrokken van wat ze eigenlijk aan het doen waren. Dat besef kwam overigens veel later, in de negentiende eeuw.

Het centrale probleem is de potentiële oneindigheid die we het beste kunnen illustreren aan de bekende meetkundige reeks

$$1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + \ldots$$

De som van die reeks is precies 1, een plausibele uitspraak waar wel veel aan vastzit. Immers, we kunnen die som nooit bereiken met het optellen van eindig veel termen. We kunnen in de praktijk nooit oneindig ver doorgaan, wel zo ver als we maar willen. De som van de reeks dienen we op te vatten als een limiet, een onbereikbaar ideaal, die met willekeurige precisie benaderd kan worden. Met het begrip 'limiet' konden de Grieken niet overweg zoals de paradoxen van Zeno, die van Achilles en de schildpad bij voorbeeld, overduidelijk aantonen. Maar Newton en grote wiskundigen na hem als Euler begrepen het evenmin al konden ze er in de praktijk op verbluffende wijze mee werken. Pas aan het begin van de vorige eeuw bracht de Franse wiskundige Cauchy de nodige strengheid in de wiskundige denkwijze aan. Hieronder zullen we deze thema's nader toelichten, waarbij het accent valt op het begrip van de limiet en dat van de oneindig voortlopende reeks.

Archimedes, geboortig uit een aristocratisch geslacht te Syracuse, een Griekse kolonie, was in zijn tijd een veelzijdig genie van groot formaat. Hij legde als Newton de grondslagen van de differentiaal- en integraalrekening en van de mechanica. Vele grote ontdekkingen staan op zijn naam. Allereerst een veel betere benadering van π waarvoor hij de benadering $223/71 < \pi < 22/7$ vond. Hij leidde dit resultaat af uit een benadering van een cirkelomtrek door een regelmatige 96-hoek, een fraai kunststukje omdat bij die berekening vierkantswortels op een geraffineerde wijze door breuken benaderd moesten worden. Archimedes was veel meer een natuurkundige, iemand die met een vast doel voor ogen praktische problemen wilde oplossen en minder geïnteresseerd was alleen over 'het wezen der dingen' na te denken. Nog steeds is algemeen bekend hoe hij in het bad zittend een methode uitdacht om de soortelijke massa van de kroon van de heerser van Syracuse te bepalen. De vraag was namelijk of die kroon van massief goud was, of dat er inwendig misschien ander materiaal was gebruikt. Zoals wij weten moeten we dan de soortelijke massa uitrekenen door de massa te delen door het volume. Wegen was geen probleem, maar wel de bepaling van de inhoud. Archimedes kwam op de gedachte daartoe de volumeverplaatsing te gebruiken. Met de kreet 'eurèka', Grieks voor 'ik heb het gevonden', werd deze ontdekking volgens de legende wereldkundig gemaakt.

Archimedes moet een echte puzzelaar zijn geweest, geen potlood en geen blaadje papier waren veilig voor hem of hij begon meteen te rekenen en te tekenen. Tenminste, als die materialen in zijn tijd hadden bestaan. Hij behielp zich dan ook met een dun stokje en fijn zand. Aldus gebogen over het wetenschappelijk stof werd hij aangetroffen door een soldaat uit het Romeinse leger dat net Syracuse veroverd had. Archimedes moet knorrig uitgeroepen hebben dat de soldaat zijn cirkels niet moest bederven, waarop de geen tegenspraak duldende militair hem doodstak. Van Archimedes is een aantal werken overgebleven die laten zien dat hij goed wist om te gaan met 'oneindig veel oneindig kleine' dingen. Wij komen erop terug wanneer we de integraalrekening, met name het bepalen van oppervlakken en inhouden, aan de orde stellen.

Een oneindig voortlopende reeks

Het begrip oneindigheid manifesteert zich heel duidelijk bij zogenaamde oneindig voortlopende reeksen. Een voorbeeld is de eerder vermelde meetkundige reeks $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$ Men kan zich gemakkelijk voorstellen wat de volgende termen van die reeks zijn. Elke term is de helft van de daaraan voorafgaande term. Wiskundigen houden ervan met dergelijke oneindig voortlopende reeksen te manipuleren, en een van de eerste dingen die men zich afvraagt is of men aan zo'n reeks een som, een getallen-

waarde kan toekennen. Dat kan natuurlijk niet door oneindig veel termen van de reeks bij elkaar op te tellen, maar laten we eens zien wat we met eindig veel termen kunnen bereiken. We maken er een klein tabelletje van, waarbij we registreren wat de som van de eerste 1, 2, 3, 4,... termen is:

1/2   3/4   7/8   15/16   31/32   63/64   127/128   ...

Deze rij nadert kennelijk tot de waarde 1 en er is dus alle reden om aan de reeks de waarde 1 toe te kennen. Die waarde noemen we een *limiet*. De limiet 1 kunnen we door optellen nooit precies bereiken, we blijven er steeds een klein beetje vandaan. Een limiet is dus een onbereikbaar ideaal, maar zoals we in het dagelijks leven heel goed met idealen overweg kunnen, kunnen wiskundigen uitstekend met limieten overweg, tenminste sinds de negentiende eeuw.

Vroeger placht men de som van een oneindig voortlopende reeks met rekentrucjes te bepalen zonder dat men zich afvroeg of de uitgevoerde berekeningen wiskundig wel door de beugel konden. In handen van een grootmeester als Leonard Euler ging dat wel goed, maar het kon ook wel eens misgaan. We laten zo'n trucje zien om daarmee de som van een algemenere meetkundige reeks te kunnen afleiden. De reeks is

$$S = 1 + r + r^2 + r^3 + r^4 + \dots$$

We brengen dit in de volgende vorm

$$S = 1 + r \times (1 + r + r^2 + r^3 + \dots)$$

Tussen de haakjes herkennen we weer de oorspronkelijke reeks, zodat

$$S = 1 + r \times S$$

Hieruit volgt meteen

$$S = 1/(1 - r)$$

de zogenaamde somformule van de meetkundige reeks.

Voor alle waarden van r komt er een getal uit, behalve voor $r = 1$. Dat is wel logisch, want dan ziet de reeks eruit als

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$$

en daaraan moeten we toch wel de 'waarde' oneindig toekennen. Wanneer we $r = 1/2$ nemen krijgen we $S = 2$, in overeenstemming met de waarde van de reeks waarmee we begonnen zijn. Met Euler kiezen we nu eens de waarde $r = -1$. De somformule geeft $S = 1/2$, maar de reeks ziet er nu uit als

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Handelen we als in het begin van dit hoofdstuk door achtereenvolgens de som van 1, 2, 3,... termen te nemen dan vinden we achtereenvolgens de waarden 0, 1, 0, 1, 0, 1,... De waarde 1/2 is er niet bij en wordt ook niet benaderd. Het enige wat we constateren is dat 1/2 de gemiddelde waarde van deze uitkomsten is. Voor Euler, een der allergrootste wiskundigen van zijn tijd, was dat geen bezwaar. Hij werkte met de waarde 1/2 en bereikte er correcte resultaten mee. In het merkwaardige gedrag van de reeks die soms nul was, een kwestie van haakjes plaatsen:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots$$

en soms 1, ook met het plaatsen van haakjes:

$$1 - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - (1 - 1) - \dots$$

zag hij de hand van God, de schepping van iets uit niets.

Dat almaar doorgaan, het rekenen met oneindig veel termen, kan blijkbaar tot vreemde resultaten leiden. We laten nog iets zien, en wel de zogenaamde harmonische reeks:

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9 + \dots$$

Voordat we de vraag beantwoorden of die reeks een getal voorstelt of dat we er de 'waarde' oneindig aan moeten verbinden, willen we verklaren waarom die reeks harmonisch heet. Twee positieve getallen, we noemen ze a en b, hebben een rekenkundig gemiddelde, een meetkundig gemiddelde en een harmonisch gemiddelde. Het rekenkundig gemiddelde is de halve som $(a + b)/2$, het meetkundig gemiddelde is $\sqrt{(ab)}$. Is h het harmonisch gemiddelde dan is $1/h$ het rekenkundig gemiddelde van $1/a$ en $1/b$. Na wat eenvoudig gereken blijkt dat

$$h = 2ab/(a + b)$$

Bij een rekenkundige reeks is een willekeurige term altijd het rekenkundig gemiddelde van zijn buren, bij een meetkundige reeks en een harmonische reeks gelden analoge uitspraken.

We beweren dat de som van de bovenstaande harmonische reeks oneindig is. Om dat voor ieder duidelijk te maken behoeven slechts wat haakjes geplaatst te worden:

$$1 + 1/2 + (1/3 + 1/4) + (1/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8) +$$
$$(1/9 + \dots + 1/16) + \dots$$

De groepjes getallen tussen de haakjes geven bijdragen die altijd groter dan 1/2 zijn. In het derde groepje bij voorbeeld bevinden

zich acht getallen die we kunnen verkleinen tot 1/16. Bij elkaar is dat meer dan 8/16 of 1/2. Met die groepjes kunnen we eindeloos doorgaan, en de bijdragen accumuleren tot oneindig.

Wie deze bewijsmethode niet kent en liever eerst een numeriek experiment wil uitvoeren kan de rekenmachine nemen en bij voorbeeld een miljoen termen sommeren. De daarmee bereikte som is iets meer dan 14, weinig indrukwekkend. Met een miljard termen blijkt de som ongeveer verdubbeld te worden. Het experiment blijkt geen enkele indicatie te geven over de mogelijke som van de harmonische reeks, maar toch weten we op grond van de bovenstaande overweging, het plaatsen van haakjes, dat de som van eindig veel termen willekeurig groot kan worden wanneer we maar voldoende termen bij elkaar optellen. Het is een soort wonder dat men heel precies kan vaststellen hoeveel termen men minstens moet nemen om een bepaalde som te bereiken. Het is weer Euler die daartoe een formule bedacht heeft:

$$1 + 1/2 + \ldots + 1/n = \log n + C + 1/(2n) + \ldots$$

waarbij in het rechterlid met log de natuurlijke logaritme is bedoeld, de bij computerprogramma's gebruikelijke notatie die de vroeger gebruikte schrijfwijze ln gaat vervangen.

In het rechterlid van deze formule bevindt zich ook weer een oneindig voortlopende reeks, maar een heel bijzondere. Door slechts een paar termen van die reeks te nemen kan toch een grote nauwkeurigheid bereikt worden, welke des te beter is naarmate n, het aantal termen van de harmonische reeks, groter is. De constante C in bovenstaande formule met de waarde .5772... wordt gewoonlijk naar Euler genoemd. Het is een van de weinige universele getallen die net als π in veel wiskundige formules voorkomen. Met behulp van deze formule kunnen we gemakkelijk afleiden hoeveel termen we van de harmonische reeks nodig hebben om een som van meer dan honderd te bereiken. Nemen we n zodanig dat $\log n = 100$ dan is het wel in orde. Dat betekent dat $n = \exp 100$, wat neerkomt op een getal van 44 (!) cijfers. Wel veel, maar nog niets in verhouding tot de oneindigheid.

Cauchy

In de wetenschap is het vaak zo dat het doen aan het denken vooraf gaat. Zo geformuleerd is het misschien een wat simplistische bewering, maar men kan er pakkende voorbeelden van geven. We hebben gezien dat men eeuwenlang met onmeetbare getallen heeft gewerkt zonder dat men eigenlijk goed begreep wat een onmeetbaar getal was. Eeuwenlang heeft men met limieten gerekend zonder dat van het begrip limiet een goed gefundeerde definitie was gegeven. Weer in de negentiende eeuw, de eeuw waarin men voor het eerst weer aansluiting vond met de subtiele en logische denkwijze van de Griekse Oudheid, werd voor het eerst voor de limiet een

goede en bruikbare wiskundige definitie gevonden. Dat hebben we te danken aan Augustin Cauchy (1783-1857), een van de grootste Franse wiskundigen uit die eeuw. Cauchy heeft niet alleen de zogenaamde analyse, alles wat met reeksen, differentiëren en integreren te maken heeft, een strenge en degelijke basis gegeven, maar hij heeft ook belangrijke bijdragen geleverd over zulke praktische zaken als het stromen van water en het bouwen van bruggen. Cauchy heeft ons getoond hoe op een verantwoorde wijze met de oneindigheid in de analyse moet worden gewerkt. Natuurlijk is dit boek niet de plaats om daar met de nodige wiskundige grondigheid aandacht aan te besteden. Daarvoor bestaan er goede leerboeken die elke student in de wiskunde behoort door te werken. Wie het fijne van de zaak wil weten en niet opziet tegen Engelstalige literatuur zou ook het voortreffelijke boek van Richard Courant en Herbert Robbins kunnen raadplegen. In de volgende paragrafen willen we trachten uit te leggen wat de definities van Cauchy in principe betekenen zonder in te veel wiskundige techniek te vervallen.

De limiet van een getallenrij

Laten we eens kijken naar de volgende aftelbaar oneindige getallenrij

$1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, \ldots$

We kunnen ze een rangnummer 1, 2, 3,... geven en het is niet moeilijk te zien welk getal bij een bepaald rangnummer hoort. Bij het rangnummer 100 hoort bij voorbeeld de breuk 100/101. Wanneer we in de rij steeds verder gaan wijkt het getal kennelijk steeds minder van 1 af, en is er reden 1 als limiet van de rij op te vatten. We kunnen constateren dat de afwijking van een getal uit de rij ten opzichte van de limiet steeds kleiner wordt, zo klein als we maar willen. Cauchy heeft die redenering in een strenge wiskundige vorm gebracht. Daarbij lette hij op de afwijking ten opzichte van de limiet en een van tevoren gegeven tolerantie. Hij vroeg zich af of elke van tevoren gegeven tolerantie op den duur, dat wil zeggen vanaf een zeker rangnummer, gehaald kon worden. Om in het gegeven voorbeeld voor de tolerantie .001 dat rangnummer te bepalen, handelen we als volgt. Het getal in de rij dat bij het rangnummer n hoort kan blijkbaar geschreven worden als $n/(n+1)$. Laten we de waarde van de tolerantie nog even in het midden, en schrijven we die als δ, dan eisen we dus dat

$$|n/(n+1) - 1| < \delta$$

vanaf een zeker rangnummer N. In dit geval leert een kleine berekening dat aan de eis voldaan is wanneer $N > 1/\delta$ is. Is dus $\delta = .001$ dan wordt voor $N > 1000$ de gestelde tolerantie bereikt. In een iets algemenere notatie heet L de limiet van de getallenrij $a_1, a_2, a_3, \ldots$

wanneer voor elke voorgeschreven tolerantie δ op den duur voldaan is aan

$|a_n - L| < \delta$

We schrijven dan

$\lim a_n = L$

of korter

$a_n \rightarrow L$

De limietdefinitie van Cauchy komt neer op een soort wedijver tussen twee wiskundigen. We noemen ze Guus en Leo, indachtig de voornamen van Cauchy en Euler. Het probleem is dus te bewijzen dat L inderdaad de limiet van de rij a_n is. Wie graag een concreet voorbeeld bij de hand wil hebben kan als hierboven $a_n = n/(n+1)$ en $L = 1$ nemen. Guus begint met een tolerantie van $\delta = .01$ en vraagt aan Leo of deze een rangnummer N kan vinden zodanig dat vanaf dat rangnummer, dus voor alle $n > N$, de afwijking van a_n tot L altijd kleiner is dan de opgegeven δ van .01. Leo rekent wat en verschaft Guus een waarde van N. Erg precies hoeft hij niet te rekenen, want elke grotere waarde van N zou ook goed geweest zijn. In het gegeven voorbeeld zou $N = 100$ al bruikbaar zijn geweest. Guus zegt: 'Dat is mooi, maar kun je het ook doen voor een kleinere tolerantie, $\delta = .001$ bij voorbeeld?' Leo slaat weer aan het rekenen en komt met een nieuwe waarde van N (in ons voorbeeld $N = 1000$). Guus zegt: 'Maar doe het nou eens voor een nog kleinere tolerantie, $\delta = .000\ 001$.' Weer gaat Leo rekenen en hij vindt weer een bruikbare waarde van N. En nog is Guus niet tevreden en herhaalt zijn vraag met een nog kleinere δ. En zo gaat het oneindig lang door als een voortdurend tweegesprek. Dat oneindig vaak herhaalde spel van vraag en antwoord is de kern van Cauchy's limietdefinitie.

Gelukkig hoeven we niet voor elke getallenrij op deze wijze na te gaan of er een limiet is. Wiskundigen beschikken over een heel arsenaal van stellingen op grond waarvan zonder of met weinig gereken kan worden vastgesteld of een bepaalde rij een limiet heeft of niet. Een heel fraaie en bruikbare stelling is:

Een getallenrij die almaar stijgt, heeft òf een limiet òf gaat naar oneindig

Het mooie van deze stelling is dat gezegd wordt dat een rij een limiet heeft zonder dat we die limiet als in het bovenstaande voorbeeld behoeven te kennen. Overigens is die stelling een typisch voorbeeld van de door Cauchy geïntroduceerde wiskundige betoogtrant. In vroegere tijden had men aan een dergelijke stelling

geen behoefte, het was toch iets dat vanzelf sprak! John Wallis (1616-1703) publiceerde in 1665 een boek getiteld *Arithmetica Infinitorum*, de rekenkunde van de oneindigheden. Zonder de wiskundige strengheid die twee eeuwen later gebruikelijk zou zijn wist hij tot spectaculaire resultaten te komen. Zijn beroemdste resultaat kunnen we als volgt formuleren. Met Wallis vormen we de rij

$a_1 = 4/3$
$a_2 = a_1 \times 16/15$
$a_3 = a_2 \times 36/35$
$a_4 = a_3 \times 64/63$
$a_5 = a_4 \times 100/99$
...

Men ziet allicht hoe die rij tot in het oneindige voortgezet kan worden. Men kan constateren dat de rij $a_1, a_2, a_3, \ldots$ voortdurend stijgt. Het is niet eens zo eenvoudig om zich ervan te overtuigen dat de rij niet boven alle grenzen uit stijgt en naar oneindig gaat. Maar wanneer we aannemen dat dat bewezen is, dan kunnen we op grond van de bovengenoemde stelling meteen concluderen dat de rij een limiet bezit. Hoe groot die limiet dan wel is, is een heel ander verhaal, en daar wist Wallis goed weg mee. Hij vond daarvoor $\pi/2$, inderdaad een heel opmerkelijk resultaat. Gewoonlijk schrijft men zijn ontdekking in de vorm van een zogenaamd oneindig produkt

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \ldots}{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \ldots}$$

De som van een oneindig voortlopende reeks

Het bovenstaande precisiewerk van Cauchy kunnen we gebruiken om ook de som van een oneindige reeks op strenge wijze te definiëren. Is

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n + \ldots$$

een oneindig voortlopende reeks, dan beschouwen we dit met Cauchy als niet meer dan een rij getallen waaraan vooreerst nog geen bijzondere betekenis moet worden gegeven. Omdat we toch niet oneindig veel termen kunnen optellen, beginnen we voorzichtig met het vormen van zogenaamde partiële sommen S_n verkregen door de eerste n termen bij elkaar op te tellen:

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$
...

De somrij $S_1, S_2, S_3, S_4, \ldots$ is zelf weer een aftelbaar oneindige getallenrij, en daarop laten we de definitie van Cauchy los. Heeft die rij een limiet dan is die per definitie de som van de oneindig voortlopende reeks. De reeks heet dan *convergent* en men zegt dat de reeks convergeert. Is er geen limiet dan heet de reeks *divergent* en zegt men dat de reeks divergeert.

In veel gevallen zijn alle termen a_n van de reeks positief. De somrij bestaat dan uit getallen die alleen toenemen. In alle wiskundige strengheid kan nu worden gezegd dat de reeks $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ òf een limiet heeft òf naar oneindig gaat. We hadden al gezien dat de harmonische reeks divergeert, dat wil zeggen

$$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + 1/6 + \ldots = \infty$$

Neemt men echter in de noemers kwadraten dan komt er de convergente reeks

$$1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + 1/36 + \ldots = \pi^2/6$$

een wonderbaarlijk resultaat dat echter niet met eenvoudige middelen bewezen kan worden.

Integraalrekening

Integraalrekening is kort gezegd een handige methode om oneindig veel oneindig kleine grootheden bij elkaar op te tellen. Een integraal is in zekere zin de limiet van een gewone som. Begripsmatig zit er wel veel aan vast, maar zonder veel moeite kan men ermee rekenen zoals Archimedes al deed, uiteraard zonder onze moderne notaties te gebruiken.

De door Archimedes gevolgde methode kunnen we toelichten door met hem het oppervlak te berekenen van een vlakdeel dat begrensd wordt door een boog van een parabool. We moeten daarbij beroep doen op de wiskundige kennis van de lezer waar deze het gebruik van Cartesische coördinaten betreft. In figuur 4.1 hebben we de parabool $y=x^2$ getekend met x- en y-as. De parabool is symmetrisch ten opzichte van de y-as en heeft zijn top in de oorsprong O. De bedoeling is om het oppervlak uit te rekenen dat begrensd wordt door de x-as, de parabool en de rechte lijn $x=1$. Dat oppervlak benaderen we als een reeks van smalle rechthoekjes beschreven binnen het vlakdeel. De basis OE verdelen we in een aantal, zeg n, gelijke lijnstukjes $OP_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}E$ die dus elk de lengte $1/n$ hebben. Op elk lijnstukje richten we een rechthoekje op dat zo goed mogelijk binnen het parabolische vlakdeel past. De eerste rechthoek met de basis P_1P_2 heeft blijkbaar de hoogte $1/n^2$ en dus de inhoud $1/n^3$. De volgende rechthoek met de basis P_2P_3 heeft de hoogte $4/n^2$ en dus de inhoud $4/n^3$. Zo kunnen we verder gaan. De hoogten van de opvolgende rechthoeken verhouden zich als de opvolgende kwadraten $1, 4, 9, 16, 25, 36, \ldots$ en hetzelfde geldt voor

Figuur 4.1 Het oppervlak begrensd door een parabolische boog.

de inhouden van de rechthoeken. Tellen we alles netjes bij elkaar op dan komt er voor de som S van alle rechthoeken

$$S=(1+4+9+\ldots+(n-1)^2)/n^3$$

Met wat technisch vernuft is het mogelijk die uitdrukking te vereenvoudigen tot

$$S=1/3-1/(2n)+1/(6n^2)$$

Het rechterlid is dan een benadering, iets aan de kleine kant, van het parabolische vlakdeel. We kunnen ervan uitgaan dat de fout die we maken kleiner wordt naarmate we meer rechthoekjes nemen. Nemen we bij voorbeeld $n=1000$ dan zijn de bijdragen van de drie termen in het rechterlid respectievelijk $1/3$, $.0015$, $.000\ 000\ 16$ en dat is bij elkaar maar heel weinig minder dan $1/3$. Wanneer we in gedachten n steeds verder laten aangroeien verdwijnt de invloed van de tweede en de derde term en houden we $1/3$ als limietwaarde over. Dat is dus ten slotte de waarde van de gezochte oppervlakte.

De limietovergang $n \rightarrow \infty$ wil in dit geval zeggen dat we oneindig veel rechthoekjes nemen die elk de oppervlakte $1/(3\times\infty)$ hebben, en dat het totaal precies $1/3$ bedraagt. Natuurlijk is dit geen goede wiskundige redenering, en zou een beginnende wiskundestudent daarmee een schrobbering oplopen, maar de gedachtengang geeft wel een goed intuïtief beeld van wat integreren eigenlijk is.

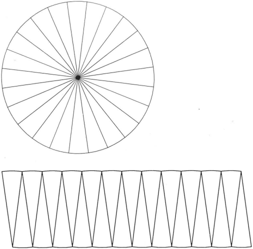
De kwadratuur van de cirkel

Een van de grootste prestaties van Archimedes is de bepaling van het oppervlak van een cirkel. Archimedes formuleerde dat probleem als het vinden van een vierkant waarvan de oppervlakte gelijk is aan dat van een cirkel met een gegeven straal, de zogenaamde kwadratuur van de cirkel. Wij schrijven daarvoor πr^2 wanneer r de straal van de cirkel is. Het komt er dus op neer een benadering te vinden voor π. Het probleem om de omtrek van een cirkel te bepalen is net zo moeilijk. Voor een cirkel met straal r is de omtrek gelijk aan $2\pi r$. Nemen we dus een cirkel met straal $r=2$ dan zijn omtrek en oppervlakte even groot, een eigenschap die we aardig kunnen illustreren met de zogenaamde taartpuntmethode zoals geschetst in figuur 4.2.

De methode van Archimedes was om de cirkel te benaderen door een regelmatige veelhoek met veel zijden. De omtrek van een ingeschreven veelhoek is natuurlijk iets kleiner dan de omtrek van de cirkel, terwijl de omtrek van een omgeschreven veelhoek juist iets groter zal zijn. Aldus kunnen we de cirkelomtrek vanuit twee kanten benaderen. Archimedes nam een veelhoek met 96 zijden en wist de volgende benadering van π af te leiden:

$3 \times 10/71 < \pi < 3 \times 1/7$

De rechter schatting 22/7 wordt in onze tijd nog steeds gebruikt als een handige vuistregel. Nemen we het rekenkundig gemiddelde van beide schattingen dan komt er het verrassend nauwkeurige resultaat 3.1419...



Figuur 4.2 Oppervlak en omtrek van een cirkel.

In de methode van Archimedes wordt een iteratiemethode gevolgd waarin het aantal zijden van de te gebruiken regelmatige veelhoeken telkens verdubbeld wordt, 6, 12, 24, 48, 96,... Bij de laatste waarde moest Archimedes stoppen omdat het rekenwerk te omvangrijk dreigde te worden. Om π precies te vinden zouden er oneindig veel stappen nodig zijn, en daarvan zijn er maar vijf afgelegd, maar de methode van Archimedes staat ons wel toe om net zoveel stappen verder te gaan als we maar willen. Van belang is de vraag of we van tevoren kunnen zeggen hoeveel stappen minstens nodig zijn om π in een gegeven aantal decimalen te bepalen. Dat blijkt een vrij eenvoudig probleempje te zijn, en een kleine berekening laat zien dat bij elke stap de onnauwkeurigheid met een factor van ongeveer 4 wordt verkleind.

Als een wiskundige toegift formuleren we hieronder de methode van Archimedes in de moderne vorm van een iteratief proces. Daarbij heeft a_n de betekenis van de omtrek van een omgeschreven regelmatige veelhoek met 6×2^n zijden, en b_n de lengte van een

overeenkomstige ingeschreven veelhoek, beide betrokken op een cirkel met de straal 1/2. Het iteratieve proces is

$$a_{n+1}=2a_nb_n/(a_n+b_n)$$
$$b_{n+1}=\sqrt{(a_{n+1}b_n)}$$

De beginwaarden zijn

$$a_0=2\sqrt{3} \quad \text{en} \quad b_0=3$$

Met een zakrekenmachine kunnen we dit recept van Archimedes snel tot uitvoering brengen en constateren dat

$$a_4=3.1427\ldots \quad \text{en} \quad b_4=3.1410\ldots$$

Tegenwoordig kan met veel betere wiskundige technieken en met de beste computers binnen een uur een nauwkeurigheid van vele miljoenen bereikt worden.

Zijn we echt verder gekomen? Van het oneindige aantal decimalen waaruit π lijkt te bestaan is het bekende aantal nog steeds verwaarloosbaar klein, en zo zal het wel blijven.

Een getallenlijn met gaten

Op de getallenlijn kunnen we getallen met punten identificeren, en zoals we spreken over limieten van getallenrijen kunnen we ook spreken van puntenrijen die al of niet tot een limietpunt convergeren. Voor een willekeurige verzameling van punten op een rechte lijn kan ook het begrip limietpunt ingevoerd worden. We bedoelen dan dat de verzameling een puntenrij bevat welke naar dat limietpunt toegaat. Beschouwen we bij voorbeeld het interval (0,1), het zogenaamde eenheidslijnstuk OE, en rekenen we de eindpunten O en E niet mee dan kunnen die eindpunten wel als limietpunten worden opgevat. Ze kunnen namelijk met een willekeurige precisie benaderd worden door een rij punten die wel tot het lijnstuk OE behoren. Zo wordt O benaderd door de puntenrij bepaald door de getallen $1/n$ waarbij n de rij van de natuurlijke getallen doorloopt. Trouwens elk punt van het lijnstuk kan worden opgevat als limietpunt van dat zelfde lijnstuk.

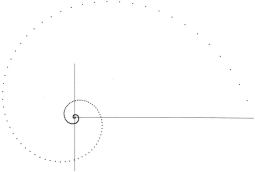
Erg boeiend is dat allemaal niet, maar laten we nu eens kijken naar de puntverzameling V die gevormd wordt door alle rationale getallen tussen 0 en 1, dat wil zeggen alle rationale punten tussen O en E. Al die punten liggen oneindig dicht tegen elkaar aan. Elk rationaal punt kan worden benaderd door een rij andere rationale punten en kan dus als een limietpunt van V opgevat worden. Tussen de rationale punten bevinden zich de irrationale. De onmeetbare punten zou men kunnen opvatten als gaten in de puntverzameling V, oneindig veel oneindig kleine gaten. Er zijn er zelfs onaftelbaar veel, zoals Cantor heeft laten zien. Elk onmeetbaar

punt, elk 'gat' kan worden benaderd door rationale punten en is dus ook een limietpunt van V. Men kan er zich moeilijk een voorstelling van maken, maar we weten dat de puntverzameling V uit aftelbaar oneindig veel punten bestaat. Er zijn echter 'veel meer' limietpunten van V, onaftelbaar veel.

We hadden ook de puntverzameling van alle onmeetbare punten van OE kunnen nemen. Het aantal punten is nu onaftelbaar oneindig, maar toch liggen alle punten los tegen elkaar en worden de 'gaten' gevormd door de meetbare punten, ook weer op te vatten als limietpunten van de onmeetbare getallen. Maar in dit geval zijn er veel minder gaten, slechts aftelbaar oneindig veel.

Limieten in twee en drie dimensies

Het begrip limiet kan ook op rijen van punten in vlak en ruimte toegepast worden. Voor een rij punten P_1, P_2, P_3,... in vlak of ruimte wil dat volgens Cauchy zeggen dat de afstand van de punten P_n van de rij tot het limietpunt P op den duur kleiner wordt dan elke van tevoren vastgestelde tolerantie. We drukken dat in de notatie meestal uit als $\lim P_n = P$ of eenvoudig $P_n \to P$. Bij wijze van illustratie bekijken we in figuur 4.3 een puntenrij die de vorm van een spiraal heeft, een zogenaamde logaritmische spiraal. Dergelijke spiralen komen in de natuur veel voor, waar zij meestal iets met groei te maken hebben. De posities van die punten denken wij vastgelegd ten opzichte van een Cartesisch assenstelsel waarvan O de oorsprong is. Is P_n het punt met rangnummer n dan nemen we aan dat OP_n de hoek $n\Phi$ maakt met de positieve x-as en dat de afstand OP_n gelijk is aan a^n. Daarbij is a een getal tussen 0 en 1 en is Φ een willekeurig positief, liefst klein, getal. In figuur 4.3 is $a = .97$ en $\Phi = .1$ gekozen.



Figuur 4.3 Een spiraal van punten.

Het plaatje laat zien dat de spiraal naar de oorsprong O toegaat en dat O het limietpunt van de rij is. Dat is een bewering die met weinig moeite streng gemaakt kan worden. Het stellen van een tolerantie δ betekent dat we een rangnummer N moeten kunnen vinden zodanig dat alle baanpunten met een hoger rangnummer, dus $n > N$, tot O een afstand hebben die kleiner is dan δ. In meetkundige taal wil dat zeggen dat de hogere baanpunten zich binnen een cirkelschijfje met straal δ om de oorsprong moeten bevinden. Zo'n cirkelgebiedje pleegt men een omgeving van O te noemen.

Het begrip limietpunt wordt ook gebruikt bij een willekeurige meetkundige verzameling V van punten. Net als bij een puntverzameling op de getallenlijn heet het punt P een limietpunt van V wanneer er een rij van punten $P_1, P_2, P_3, \ldots$ bestaat die allen tot V behoren zodanig dat P de limiet is van die rij. In de laatste hoofdstukken zullen we vele voorbeelden aantreffen waarbij de genoemde begrippen gehanteerd worden. In het bijzonder wijzen we daarbij op de zogenaamde 'Julia-sets', puntverzamelingen die eruit zien als oneindig kronkelende kromme lijnen. Hun ontstaanswijze doet denken aan een eenheidslijnstuk waarvan eerst de aftelbaar oneindig vele meetbare punten worden 'gemaakt', en waaraan als een dichten van de gaten de onmeetbare punten worden toegevoegd.

5 ONEINDIG VERRE PUNTEN EN LIJNEN

Wie veel naar de hemel kijkt, heeft misschien wel eens een nacht meegemaakt waarin een aantal vallende sterren voorbijflitsen, de Perseïden bij voorbeeld. Een goede waarnemer zal constateren dat de banen van de vallende sterren vanuit een enkel 'oneindig ver punt' lijken te ontspringen. Astronomen verzekeren ons dat de banen in werkelijkheid evenwijdig lopen en dat de vallende sterren restanten of bouwmateriaal zijn van hemellichamen, de zandkorrels van het heelal.

De Griekse geleerden, Euclides bij voorbeeld, brachten de meetkunde op een hechte en logische basis, maar met evenwijdige lijnen bleven ze wat moeite hebben. Hoewel ze goed nadachten over begrippen als oneindig en onbegrensd zou eerst vele eeuwen later daaraan een betere inhoud kunnen worden gegeven.

Kunstenaars weten de meetkundige oneindigheid binnen menselijk bereik te brengen met de perspectivische weergave van ruimtelijke objecten. Ook daarvoor legden de Grieken de wiskundige grondslagen. Hun kennis ging verloren maar werd in de periode van de Italiaanse Renaissance herontdekt. Beroemde schilders als Piero della Francesca waren ook wiskundigen die aan de ontwikkeling van de (toegepaste) meetkunde daadwerkelijk bijdroegen. Maar in de kunst, en vooral in de oosterse kunst, kent men ook andere methoden om iets weer te geven wat (oneindig) ver weg is.

Christian Morgenstern (1871 - 1914)

De veelzijdige Duitse dichter Morgenstern is vooral bekend geworden door zijn wat groteske gedichten, waarin hij op humoristische wijze en vaak met een geniale woordacrobatiek de spot dreef met bestaande toestanden. Het volgende gedicht, dat doet denken aan de almaar voortsjokkende soldaten van Napoleon, laat zien dat Morgenstern ook verstand had van meetkunde.

DIE ZWEI PARALLELEN

Es gingen zwei Parallelen
ins Endlose hinaus,
zwei kerzengerade Seelen
und aus soliden Haus.

Sie wollten sich nicht schneiden
bis an ihr seliges Grab;
das war nun einmal der beiden
geheimer Stolz und Stab.

Doch als sie zehn Lichtjahren
gewandert neben sich hin,
da ward's dem einsamen Paare
nicht irdisch mehr zu Sinn.

War'n sie noch Parallelen?
Sie wussten's selber nicht
sie flossen nur wie zwei Seelen
zusammen durch ewiges Licht.

Das ewige Licht durchdrang sie,
da wurden sie eins in ihm;
die Ewigkeit verschlang sie,
als wie zwei Seraphim.

De boeken van Euclides

De grondslagen van de meetkunde werden in de Oudheid door de Grieken gelegd. Wat tot aan de derde eeuw voor Christus bekend was is terug te vinden in de boeken van Euclides (met de klemtoon op de tweede lettergreep). Van Euclides is tamelijk veel bewaard gebleven. Zijn belangrijkste werk, de zogenaamde *Elementen*, ontstaan omstreeks 320 v. Chr., heeft eeuwenlang model gestaan voor een manier van wiskundig denken volgens strikt logische wetten. Tot in onze eeuw was het het meest gebruikte leerboek op onze scholen. In populariteit en in aantal drukken werd het slechts geëvenaard door de Bijbel. De *Elementen* bestaan uit dertien hoofdstukken. De eerste negen bevatten hoofdzakelijk de vlakke meetkunde of planimetrie. Er wordt daarin ook veel aandacht besteed aan evenredigheden en aan de eigenschappen van de natuurlijke getallen. Men kan er ook de eigenschappen van de priemgetallen, waarover we al gesproken hebben, in terugvinden. In het tiende hoofdstuk gaat Euclides uitvoerig in op de onmeetbare verhoudingen die bij meetkundige constructies met passer en liniaal ontstaan, zoals $\sqrt{2}$ en het gulden snede getal. Het getal π was Euclides nog niet bekend, tenminste niet in de nauwkeurigheid welke Archimedes er later aan gaf. Op die onmeetbare getallen komen we

later nog uitvoeriger terug. In de laatste drie hoofdstukken wordt de ruimtelijke meetkunde of de stereometrie behandeld.

Grondwaarheden

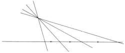
Euclides probeert alle wiskundige redeneringen te herleiden tot grondwaarheden. Hij begint met het formuleren van 23 definities, zes postulaten en negen axioma's. Zo zegt hij:

Een punt is wat geen delen heeft

We kunnen wel raden wat de gedachtengang achter deze definitie is. Wanneer we met potlood, pen of viltstift op papier een punt willen aanbrengen, vormen we eigenlijk een vlekje, een stip, met wat zwartsel. Dat is voor de meeste praktische doeleinden een goede benadering. Technisch tekenaars zijn wat veeleisender. In gedachten kunnen we onze eisen steeds hoger stellen en een reeds getekende stip vervangen door een kleinere, maar steeds blijft het een vlekje dat in delen verdeeld, desgewenst gehalveerd, kan worden. Wij hebben daarmee een limietproces voor ogen waarbij de afmetingen van de stip steeds kleiner worden, totdat na oneindig veel stappen alle afmetingen verdwenen zijn, de limietvorm van de stip niet meer deelbaar is en punt is geworden. Deze Griekse definitie van een punt is in onze moderne ogen niet goed bruikbaar. We krijgen een mededeling dat een punt iets niet heeft – maar misschien heeft een punt wel iets anders. Overigens heeft die mededeling alleen maar zin wanneer we al eerder weten wat een punt is. Het valt niet mee om een betere definitie te geven. De gedachte het begrip 'punt' via een soort limietproces uit het begrip 'stip', door voortdurende halvering bij voorbeeld, af te leiden kunnen we ook wel vergeten, want dan moeten we zowel het begrip 'stip', een verzameling van punten (?), kennen als vertrouwd zijn met een limietproces. Over dat laatste hebben de Grieken veel nagedacht, we komen ook daarop later terug. We herinneren de lezer alleen even aan de bekende anekdote van Achilles en de schildpad.

De problemen blijven zich opstapelen, want Euclides wil op analoge wijze ook lijnen en vlakken definiëren. Tegenwoordig kijken we daar heel pragmatisch tegenaan. We hebben ons gerealiseerd dat het zinloos en ook niet nodig is om elementaire begrippen als 'punt' en 'rechte lijn' te willen definiëren. Gemakshalve beperken we ons even tot de meetkunde in het platte vlak. We gaan ervan uit dat er dingen zijn die we punten noemen en dingen die we rechte lijnen (kortweg rechten of lijnen) noemen. Door twee punten gaat altijd een rechte lijn, en twee rechten zijn òf evenwijdig òf snijden elkaar in een punt. De Grieken hadden bovendien nog als axioma dat door een punt buiten een rechte lijn één en slechts één lijn evenwijdig aan de eerste lijn getrokken kon worden. Dat beroemde of liever beruchte zogenaamde parallellenpostulaat is een bron van veel zorg geworden, maar daarover willen we liever in het zesde hoofdstuk praten.

Er zit een opvallende asymmetrie in de grondaxioma's. Door twee punten gaat altijd een lijn, maar twee lijnen snijden elkaar niet altijd in een punt. Laten we een van die twee lijnen, zeg a, vasthouden en laten we de tweede lijn b om een van zijn punten P een beetje draaien zodanig dat b bijna of helemaal evenwijdig aan a loopt (zie figuur 5.1). We constateren dan dat het snijpunt, dat we S noemen, langs a steeds verder weg loopt om ten slotte in het oneindige te verdwijnen. Hierbij is weer sprake van een limietproces, maar we gebruiken het alleen om onze gedachten in het goede spoor te leiden.



Figuur 5.1 Op weg naar oneindig, naar evenwijdigheid.

We introduceren bij wijze van definitie zogenaamde oneindig verre punten en we zeggen dat twee evenwijdige lijnen elkaar snijden in een *oneindig ver punt*. We hebben nu bereikt dat de uitspraak 'twee rechten hebben altijd een punt gemeen' altijd waar is. Nu even de eerste uitspraak controleren: 'door twee punten gaat altijd een rechte lijn'. Wanneer een van die punten oneindig ver weg is en de andere niet dan is die uitspraak equivalent met de bewering dat door een punt een lijn gaat evenwijdig aan een andere. Volgens het parallellenpostulaat is dat in orde. De enige uitzondering is wanneer beide punten oneindig ver weg zijn. Om dat te verhelpen introduceren we als nieuw begrip de *oneindig verre lijn*. Alle oneindig verre punten bevinden zich op die lijn. Omdat de verzameling van de rechte lijnen uitgebreid is moeten we weer het eerste axioma controleren, enzovoort. We laten dat maar aan de lezer over. Deze zal geen moeite hebben te constateren dat nu alles in orde is. Zonder uitzondering bepalen twee punten een lijn en bepalen twee lijnen een punt, een symmetrie welke in de meetkunde *dualiteit* wordt genoemd.

Het begrip 'oneindig ver punt' kunnen we identificeren met 'richting'. Wie denkt aan een in perspectief getekend landschap waarin zich bij voorbeeld rechte wegen en bomenrijen bevinden weet dat lijnen die in werkelijkheid evenwijdig zijn, elkaar op de afbeelding snijden in een punt op de horizon, een vluchtpunt. Er is dus niets op tegen om een oneindig ver punt als vluchtpunt en de oneindig verre rechte als horizon of vluchtlijn te betitelen. De sterren aan de hemel zijn praktisch zulke oneindig verre punten. Waar men zich op aarde ook bevindt, ze staan altijd in dezelfde richting, een gegeven waarvan men bij de geografische plaatsbepaling dankbaar gebruik maakt.

Projectieve meetkunde

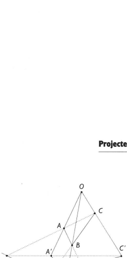
Het denkbeeld om in de meetkunde oneindig verre punten in te voeren werd reeds door Johannes Kepler (1571 - 1630) uitgesproken, dezelfde die we kennen als de ontdekker van de naar hem genoemde wetten in de astronomie. We kunnen ons voorstellen dat Kepler, die ongetwijfeld vele nachten naar de sterren keek, ze

als oneindig verre punten betitelde. Een soortgelijke gedachte werd uitgesproken door Girard Desargues (1593 - 1662), een Frans architect en meetkundige wiens naam voortleeft in een naar hem genoemde meetkundige stelling. Toch duurde het tot de Napoleontische tijd voordat die begrippen in de meetkunde ingang vonden. Dat was vooral door toedoen van Jean Victor Poncelet (1788 - 1868), die als genie-officier de ongelukkige veldtocht van Napoleon in Rusland meemaakte. Daar in gevangenschap maakte hij een ontwerp van wat later een belangrijk meetkundig standaardwerk zou worden. Toen hij was teruggekeerd in zijn geboorteland diende hij zijn werkstuk in bij de Franse Akademie van Wetenschappen. Helaas voor hem kwam het in handen van wiskundigen die van meetkunde weinig begrip hadden en werd het prompt in beleefde termen verworpen:

'...hoezeer ook het werk in zijn geheel waarderend meent de commissie de algemene geldigheid van de genoemde beginselen in twijfel te trekken,... en de jeugdige schrijver te moeten verwijten al te stoutmoedig te zijn geweest.'

Maar toch verscheen in 1822 een standaardwerk, *Traité des Propriétés Projectives des Figures*, de grondslagen van wat tegenwoordig de projectieve meetkunde heet, en oogstte het later de grootste bewondering.

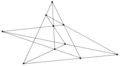
Projecteren



Figuur 5.2 De projectie van een driehoek.

In de projectieve meetkunde houdt men zich primair bezig met meetkundige eigenschappen die bij projectie niet veranderen. Projectie kunnen we ons voorstellen als een ruimtelijk gebeuren, als het projecteren van dia's op een scherm. Het scherm of vlak van projectie pleegt men het tafereel te noemen. Het centrum van projectie is een willekeurig punt dat we O (het oogpunt) noemen. Projecteren van een punt P vanuit O betekent niets anders dan dat we de lijn OP met het projectievlak τ snijden en P vervangen door het snijpunt P'. In figuur 5.2 hebben we op deze wijze vanuit een projectiecentrum O een driehoek ABC in een zeker vlak σ geprojecteerd als een driehoek $A'B'C'$ in het projectievlak of tafereel τ. Terwille van de duidelijkheid hebben we een paar delen van de lijnen gestreept en aan de figuur de snijlijn van σ en τ toegevoegd.

Er zijn mensen die moeite hebben met het zien van ruimte in vlakke figuren. Zij zien in figuur 5.2 gewoon twee driehoeken ABC en $A'B'C'$ die de merkwaardige eigenschap hebben dat de verbindingslijnen van overeenkomstige hoekpunten AA', BB' en CC' door hetzelfde punt O gaan. Het is dan eigenlijk merkwaardig dat de snijpunten van de overeenkomstige zijden, A'' als snijpunt van BC en $B'C'$ enzovoort op een zelfde rechte lijn liggen. Wie deze figuur voor het eerst ziet en geen kennis heeft van de ruimtelijke achtergrond ziet hierin een bijzondere meetkundige eigenschap die de naam van stelling verdient. En inderdaad hebben we hier te maken met de zogenaamde stelling van Desargues, de architect en



Figuur 5.3 De configuratie van Desargues.

meetkundige waarover we eerder hebben gesproken. We hebben die figuur nog eens apart getekend in figuur 5.3 als een netwerk van tien lijnen en tien punten. Wanneer we even vergeten hoe de figuur ontstaan was dan valt ons wellicht de regelmatigheid van de structuur op. Een samenspel van tien lijnen en van tien lijnen die alle dezelfde rol spelen. Op elke lijn liggen drie punten en door elk punt gaan drie lijnen. Een dergelijke bijzondere meetkundige figuur noemt men een configuratie, en deze is uiteraard naar Desargues genoemd.

Wanneer men deze planimetrische eigenschap met louter planimetrische middelen wil bewijzen moet men met veel vernuft te werk gaan, maar wanneer men deze figuur ontstaan denkt uit een ruimtelijke projectie van twee driehoeken, dan is het bijna een vanzelfsprekendheid.

Oneindig verre punten in de ruimte

De invoering van oneindig verre elementen in de stereometrie geeft weinig problemen. Elke ruimtelijke lijn heeft een oneindig ver punt, en alle oneindig verre punten vormen met elkaar het zogenaamde oneindig verre vlak. Een willekeurig vlak snijdt het oneindig verre vlak dan volgens een oneindig verre lijn. Onderling evenwijdige lijnen hebben dezelfde richting en gaan door hetzelfde oneindig verre punt. Onderling evenwijdige vlakken gaan door dezelfde oneindig verre rechte. De sterren aan het hemelfirmament hebben we al genoemd als wellicht de meest praktische toepassing van het nieuwe wiskundige begrip. De hemel zelf is dan het oneindig verre vlak. De afstand tussen twee sterren plegen we dan ook uit te drukken als het verschil van twee richtingen, als een maat in graden, minuten en seconden.

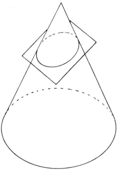
In de projectieve meetkunde worden kegel en cilinder gelijkwaardige figuren. Een kegel wordt gevormd door rechte lijnen, de zogenaamde beschrijvenden, die door een enkel punt, de top, gaan. Bij een cilinder lopen de beschrijvenden onderling evenwijdig, maar nu kunnen we zeggen dat ze alle door hetzelfde oneindig verre punt gaan. Een cilinder is dan niets anders dan een kegel met een oneindig verre top.

Kegelsneden

De Griekse wiskundigen waren goed vertrouwd met de kegelsneden. Hun belangrijkste vertegenwoordiger was Apollonios van Perga (ca. 260 - 170 v. Chr.) uit de Hellenistische periode. Hij was waarschijnlijk werkzaam in Alexandrië en heeft een werk van acht delen over de kegelsneden geschreven waarvan er zeven zijn overgeleverd. Apollonios is tegenwoordig onder andere bekend door het naar hem genoemde probleem een cirkel te construeren die drie andere gegeven cirkels raakt. Apollonios was ook degene die de namen parabool, ellips en hyperbool introduceerde. Die namen

hadden iets te maken met oppervlakteberekeningen. Er was daarvoor een bepaalde formule die voor de parabool precies passend was, voor de ellips een tekort gaf en voor de hyperbool een teveel. Wie enige kennis heeft van het gebruik van Griekse termen in onze taal kan die woorden wel doorzien.

Voor de Grieken was een kegel een meetkundig object dat verkregen werd door alle punten van een cirkel, de grondcirkel, met een punt, de top, te verbinden. Die verbindingslijnen heten de beschrijvenden van de kegel. De eenvoudigste soort is de zogenaamde rechte cirkelkegel waarbij de top zich loodrecht boven het middelpunt van de grondcirkel bevindt. Naar de moderne opvattingen doen we er beter aan bij een kegel de beschrijvenden niet op te vatten als lijnstukken maar als zich oneindig ver uitstrekkende rechte lijnen. Doen we dat bij een rechte cirkelkegel dan ontstaat wat de Grieken een dubbelkegel plachten te noemen. Maar wij dienen er een enkelvoudig meetkundig object in te zien dat uit twee identieke trechtervormige delen bestaat. Snijden we het object met een vlak dan zijn er in eerste instantie twee mogelijkheden. Of het vlak snijdt een van de twee trechtervormige delen, òf het snijdt ze allebei. In het eerste geval is de snijkromme een ellips, in het andere geval ontstaat een hyperbool die dus uit twee gescheiden delen bestaat. Er is echter nog een tussenvorm waarbij het snijvlak evenwijdig loopt aan een van de beschrijvenden van de kegel. We krijgen dan als snijkromme een parabool. Het ontstaan van de ellips als snijkromme is geschetst in figuur 5.4.

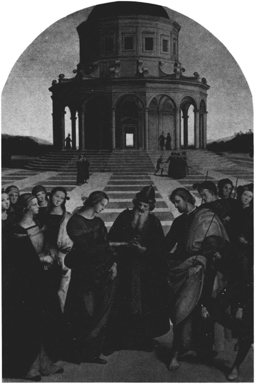


Figuur 5.4 Een kegelsnede.

Ellips en hyperbool zien er geheel verschillend uit, maar in de projectieve meetkunde zijn het equivalente figuren die door projectie uit elkaar afgeleid kunnen worden. Dat kunnen we begrijpen wanneer we het experiment van Apollonios interpreteren als een projectiemethode. Apollonios neemt een cirkel en projecteert die vanuit een zeker punt O. Hij verbindt dus alle punten van de cirkel met O waardoor er bij hem een kegel ontstaat met top O. Het snijden van die kegel met een vlak τ vatten we nu op als het projecteren van de cirkel vanuit O op het projectievlak τ. Het resultaat is letterlijk een kegelsnede, en die kegelsnede kan alle vormen aannemen. Gaan we er nog iets verder op in dan zouden we kunnen zeggen dat de verschillende typen kegelsneden zich alleen van elkaar onderscheiden door hun gedrag in het oneindige. De ellips, met de cirkel als speciaal geval, heeft geen oneindig verre punten. De hyperbool heeft er twee, en de parabool heeft er slechts één. Men zegt dan ook dat de parabool raakt aan de oneindig verre rechte.

Perspectief

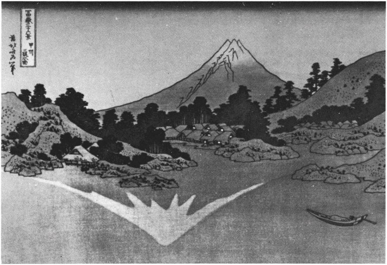
Ons menselijke zien is gebaseerd op de projectie van ruimtelijke structuren op een vlak. Ons oog fungeert als een optisch systeem waarbij via een lens een nauwkeurige afbeelding van de ruimtelijke werkelijkheid op het netvlies wordt verkregen. Op de wijze van een computer verwerken onze hersenen de optische indrukken tot



Figuur 5.5 Raffaello, De bruiloft van Maria.

een samenhangend geheel in het menselijk bewustzijn. Dat we bovendien met twee ogen in staat zijn tot een soort stereoscopische waarneming van de werkelijkheid, zodat we korte afstanden redelijk kunnen schatten, is een extra faciliteit die we in dit bestek moeten negeren. Ons probleem is het probleem van alle tekenaars en schilders die met een afbeelding op iets vlaks toch de indruk van ruimtelijkheid willen wekken.

We bekijken een schilderij van een groot kunstenaar, Raffaello Sanzio (1483-1520), die de regels van de wiskundige perspectief volledig beheerste (figuur 5.5). Raffaello toont ons de bruiloft van Maria en Jozef, maar daar gaat het nu niet om. De religieuze handeling is geplaatst op het terras van een zich op de achtergrond bevindend koepelvormig gebouw. Alle lijnen lijken te lopen naar een



Figuur 5.6 Hokusai, Gezicht op de Fuji-berg.

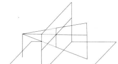
centraal vluchtpunt dat zich bevindt in de voorste open poort van het ronde bouwwerk. Alle aandacht is gericht op de grote figuren op de voorgrond, die op de achtergrond zijn in werkelijkheid even groot, maar worden natuurlijk op correcte wijze met een perspectivische verkorting weergegeven. De horizon, de lijn van alle vluchtpunten, is goed zichtbaar, maar wordt in dit Italiaanse landschap enigszins gemaskeerd door geboomte en ver verwijderde bergen. Alles wat zich op het niveau van de toeschouwer of waarnemer bevindt, wordt precies op de horizon afgebeeld. Omdat de figuur van de hogepriester zich er ruim onder bevindt, is de ooghoogte ongeveer tweeëneenhalve meter. Dat komt ook goed overeen met het aantal trappen, die tot het eerste terras van het bouwwerk leiden.

Een kunstenaar die alles wat van een landschap te zien is op zijn schilderij wil weergeven is welhaast gedwongen dat wat zich ver weg bevindt ook verkleind weer te geven. Hoe verder hoe kleiner. Wat oneindig ver weg is wordt aldus oneindig klein afgebeeld, dat kan men zonder wiskundige wetten van de perspectief ook wel begrijpen. Maar toch gaat het enigszins tegen de natuur in om dat beginsel in al zijn consequenties streng door te voeren.

Niet alle schildersscholen hebben behoefte aan een soort fotografische weergave van de werkelijkheid. Men kan ook als in de Chinese schilderkunst zich laten inspireren door wat de natuur ons voor schoons te bieden heeft om dan thuisgekomen een kunstmatig landschap te creëren op puur esthetische wijze.

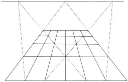
Niet een Chinees maar een Japans landschap zien we op de afbeelding hiernaast, een beroemde kleurenhoutsnede van de kunstenaar Hokusai (1760-1849) (figuur 5.6). Ondanks het feit dat de afbeelding spot met de wetten van de optica ervaren we dit niet als storend, integendeel zouden we zeggen. In het algemeen vermijden de Japanse kunstenaars nog meer dan de Chinezen een blik op het oneindig verre. Een horizon is meestal afwezig en wat ver weg is wordt verdoezeld door wolkenflarden en nevelslierten. De westerse perspectief was in het Verre Oosten wel bekend maar werd er nimmer populair.

Het principe van de mathematische perspectief is geschetst in figuur 5.7. De af te beelden ruimtelijke constructie wordt daarbij punt voor punt en lijn voor lijn geprojecteerd vanuit een vast punt, het oogpunt dat we O noemen. Het vlak τ, waarop geprojecteerd wordt, staat bekend als het tafereel. Bij toepassingen in de schilderkunst waarbij een landschap of een bouwwerk op een schildersdoek of paneel geprojecteerd wordt strekt de ruimtelijke structuur zich in de regel horizontaal over het aardoppervlak uit. Wiskundig kunnen we dit vertalen als een grondvlak V ten opzichte waarvan het tafereel een loodrechte stand inneemt. De projectie P' van een willekeurig punt P van het grondvlak V wordt dus verkregen door OP te snijden met τ.



Figuur 5.7 Het principe van de centrale perspectief.

De oneindig verre punten van V worden geprojecteerd op de zogenaamde horizon, het beeld dus van de oneindig verre rechte van V. Die projecties heten vluchtpunten en ze corresponderen met richtingen in het vlak V. In de praktijk maakt men veel gebruik van de vluchtpunten die behoren bij een richting die loodrecht op het tafereel staat of er hoeken van 45 graden mee maakt.



Figuur 5.8 De projectie van een tegelvloer.

In figuur 5.8 laten we nog even de bekende constructie van een tegelvloer zien.

Alles wat zich boven het grondvlak precies op ooghoogte bevindt, wordt op de horizon afgebeeld, een eenvoudig principe dat we al bij de analyse van het schilderij van Raffaello hebben gebruikt om de hoogte van het oogpunt te kunnen bepalen. Schilders kiezen om artistieke redenen vaak een heel laag of een heel hoog standpunt. Bij de zogenaamde vogelperspectief wordt het landschap als het ware met de ogen van een vogel bekeken. De horizon is dan zo hoog dat hij buiten de begrenzing van het tekenvel valt, een methode dus om de afbeelding van de oneindigheid te vermijden. Men kan zich voorstellen dat deze techniek in de Aziatische schilderkunst heel populair was.

Op grond van de voorgaande beschouwingen is het niet moeilijk om na te gaan wat er terechtkomt van de perspectivische afbeelding van een cirkel of bol. Wanneer we in gedachten alle punten van een cirkel verbinden met het oogpunt O krijgen we een kegel die O als top heeft. Die kegel snijdt op het tafereel een kegelsnede uit, doorgaans een ellips. Om een bol af te beelden brengen we wederom een kegel aan die O als top heeft en we laten de beschrijvenden raken aan de bol. De bol wordt als het ware omhuld door een kegelmantel. De snijkromme van die kegel met τ is dan weer een kegelsnede. We zien ook dat een bol zelden als een cirkel zal worden afgebeeld. Hoe meer de bol zich in een zijwaartse positie bevindt des te meer afplatting de elliptische projectie ondergaat.

Parallelprojectie

Een bijzondere vorm van projectie ontstaat wanneer het oogpunt van de perspectief zich in een oneindig verre positie bevindt. De projecterende lijnen zijn nu alle parallel, lopen dus in dezelfde richting. Die speciale en vooral bij technisch tekenwerk veel gebruikte vorm van projecteren noemt men parallelprojectie. Het bezwaar is natuurlijk dat oneindig verre punten bij deze projectie ook oneindig ver zijn zodat er voor een horizon geen plaats is. Voor artistieke doeleinden heeft de parallelprojectie dus beperkingen, maar weer in de oosterse schilderkunst is de methode heel populair, omdat de resultaten in de praktijk maar weinig verschillen van die van de vogelperspectief. Het grote voordeel van de parallelprojectie is dat evenwijdige lijnen na projectie evenwijdig blijven, en dat verhoudingen van lijnstukken op dezelfde lijn eveneens bewaard blijven. Toch maakte men een enkele maal wel gebruik van de zogenaamde westerse techniek van de centrale perspectief. Ter illustratie daarvan tonen we een prent van Hiroshige (1797-1858) uit een serie van stadsgezichten van Tokio. Afgebeeld is de Surugastraat, met de Fuji-berg op de achtergrond (figuur 5.9).

Figuur 5.9 Hiroshige, De Fuji-berg in westerse perspectief.

6 NIET-EUCLIDISCHE MEETKUNDE

Wonderlijke meetkunde, maar toch opgebouwd volgens strenge logische wetten die vrij van onderlinge tegenspraak zijn. De som van de hoeken van een driehoek is niet meer gelijk aan een gestrekte hoek, 180 graden. In een vlak zijn de oneindig verre punten òf geheel afwezig òf ze liggen niet op een rechte lijn. Meer dan twintig eeuwen was de Euclidische meetkunde alleenheerser, maar sinds de achttiende eeuw kwamen ook andersoortige meetkunden tot ontwikkeling. Aanvankelijk waren het nog de vreemde bedenksels van pioniers als Gauss, Bolyai, Lobatsjefski en Riemann en alleen maar studieobjecten van zuiver wiskundigen. Maar in deze eeuw hebben ze toepassing gevonden in kunst en natuurwetenschap. Ons heelal is op grote schaal een gekromde ruimte waarin de zogenaamde elliptische meetkunde van Riemann van toepassing is. Een kunstenaar als Escher ontwierp fraaie patronen in de zogenaamde hyperbolische meetkunde van Lobatsjefski.

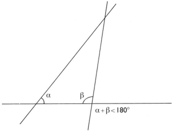
Het parallellenpostulaat

Euclides vermeldt in het eerste boek van zijn *Elementen* een aantal meetkundige grondwaarheden, zogenaamde postulaten, eigenschappen welke geen bewijs behoeven. Met bewijs bedoelen we natuurlijk een afleiding uit eenvoudiger beginselen. Wie probeert een wiskundig systeem axiomatisch te funderen dient uit te gaan van een aantal axioma's. Die axioma's moeten aan twee belangrijke eisen voldoen. In de eerste plaats moeten ze onderling vrij van tegenspraak zijn. Stel dat men een van de axioma's ongebruikt laat. Het mag dan nimmer gebeuren dat een bewering die uit de overige axioma's is afgeleid met het ongebruikte axioma in strijd is. In de tweede plaats dienen de axioma's zo zuinig mogelijk te zijn. Dat is meer een streven naar perfectie dan een echt praktische noodzaak. Maar in de wiskunde en zeker in de zuivere wiskunde streeft men immer naar de hoogst mogelijke graad van volmaaktheid.

De eerste vier postulaten van Euclides behoeven weinig commentaar, daar is iedereen het over eens, maar met het vijfde postu-

laat is iets eigenaardigs aan de hand. Het kan als volgt geformuleerd worden:

Indien twee rechte lijnen in een vlak door een derde gesneden worden, en de binnenhoeken aan één zijde van de snijlijn een som opleveren die kleiner is dan twee rechte, dan zullen die twee lijnen eventueel na verlenging elkaar snijden, en wel aan die zijde van de snijlijn waar de beide binnenhoeken liggen waarvan de som kleiner is dan twee rechte.



Figuur 6.1 Het parallellenpostulaat.

Een heel verhaal dat zonder bijgaande illustratie misschien moeilijk te volgen is (zie figuur 6.1).

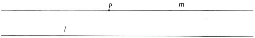
Die meetkundige eigenschap heeft inderdaad veel weg van een stelling, een bewering die bewezen zou moeten kunnen worden. En inderdaad hebben wiskundigen dat zo'n twintig eeuwen lang geprobeerd. Succes bleef uit, en weldra zullen we begrijpen waarom. Wel kon men het axioma van Euclides vervangen door een soortgelijke wat eenvoudiger aandoende equivalente bewering. Equivalent wil zeggen dat niet alleen het parallellenpostulaat uit het nieuwe axioma kon worden afgeleid, maar dat omgekeerd het nieuwe axioma in het systeem van Euclides gewoon een stelling was die met zijn axioma's te bewijzen was. De mooiste versie is de volgende:

Is l een rechte lijn en P een punt buiten die lijn dan kan door P één en slechts één lijn m evenwijdig aan l getrokken worden

Dit *axioma van de evenwijdige lijn* is geïllustreerd in figuur 6.2.

Het 'bewijs' van Saccheri

Nadat men eeuwenlang tevergeefs geprobeerd had het parallellenpostulaat of dat van de evenwijdige lijn te bewijzen sloeg een onbekende Italiaanse wiskundige, Girolamo Saccheri (1667-1733) van de universiteit van Pavia een nieuwe weg in. Hij volgde daarbij de indirecte methode met het doel door het ontkennen van het vijfde axioma tot een tegenspraak te komen, een zogenaamd bewijs



Figuur 6.2 Het axioma van de evenwijdige lijn.

uit het ongerijmde. Laten we eens aannemen, zei hij, dat in figuur 6.2 door het punt P niet precies één lijn m evenwijdig aan l mogelijk is. Er zijn dan twee alternatieven. Of een zodanige parallel bestaat niet, òf er zijn er minstens twee. Saccheri werkte deze hypothesen uit en construeerde op scherpzinnige wijze een reeks van wonderlijke meetkundige eigenschappen. Er was geen speld tussen te krijgen, maar vreemd en ongewoon was het wel. Zo ongewoon dat hij op een bepaald moment verklaarde dat de door hem afgeleide meetkundige eigenschappen zo 'tegennatuurlijk' waren dat ze wel fout moesten zijn. Zijn hypothesen deugden dus niet, en het parallellenpostulaat bleef ongerept over. Zijn bevindingen legde hij neer in een boekje dat in 1733 verscheen onder de titel *Euclides ab omni naevo vindicatus*, dat wil zeggen 'Euclides van elke smet ontdaan'. Zoals dat met zoveel publikaties uit die tijd gebeurde gingen veel exemplaren verloren of raakten zoek, en pas in 1889 werd de wiskundige wereld door een andere Italiaanse wiskundige, Beltrami, op het bestaan van dit boekje opmerkzaam gemaakt. Inmiddels had de niet-Euclidische meetkundige zich een bestaansrecht verworven en werd, althans onder wiskundigen, geheel geaccepteerd. Achteraf bleek dat Saccheri zonder het te beseffen een fraai stuk niet-Euclidische meetkunde had ontwikkeld. Op de drempel staand van een wereldschokkende ontdekking miste hij net die ene beslissende stap.

Lobatsjefski en Bolyai

De ware ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde danken wij aan de genoemde twee Oosteuropese wiskundigen die omstreeks 1830 bijna gelijktijdig en onafhankelijk van elkaar hun baanbrekende ideeën presenteerden. Nikolai Iwanowitsj Lobatsjefski (1793-1856), geboren in het hart van Rusland uit een eenvoudige boerenfamilie, openbaarde al jong zijn gaven op vele gebieden. In 1807 meldde hij zich bij de pas gestichte universiteit van Kazan, en bracht het er weldra tot de hoogste post van rector. Behalve wiskunde had hij ook bouwkunde gestudeerd en hij bracht zijn kennis in praktijk bij de verdere uitbouw van de universiteit. En passant organiseerde hij de bestrijding van een cholera-epidemie en van een brand die de universiteit dreigde te vernietigen. Wetenschappelijk had hij een ketterse geest die zich niets aantrok van gevestigde tradities. Uit nagelaten geschriften blijkt dat al in 1826 zich bij hem de gedachte had postgevat dat ontkenning van het parallellenpostulaat tot een andersoortige meetkunde aanleiding zou kunnen geven. De officiële publikatie verscheen in 1829.

Drie jaar later werd door een Hongaarse wiskundige, Farkas

Bolyai, een wiskundeboek gepubliceerd. Zelf had hij tevergeefs naar een bewijs van het parallellenpostulaat gezocht, maar zijn zoon Janos (1802 - 1860) had iets leuks bedacht dat hij als Appendix aan zijn boek had toegevoegd. Die Appendix was niets meer of minder dan een tweede onafhankelijke ontdekking van de niet-Euclidische meetkunde. Toen Gauss, een der grootste wiskundigen van zijn tijd, ervan hoorde prees hij de jonge Bolyai, maar voegde daaraan iets toe in de geest van: 'Dat heb ik vroeger ook wel eens bedacht, en ik had het best kunnen uitwerken, maar ik wilde de wiskundige gemeenschap niet te veel irriteren, ze waren er nog niet aan toe.' Bolyai trok zich deze opmerking zo aan dat hij min of meer stopte met de wiskunde, de aardigheid was er voor hem af. Maar misschien vond hij compensatie in het Oostenrijkse leger als een gewaardeerd officier die schermkunst met vioolspel wist af te wisselen.

Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), later een van de meest inspirerende wiskundigen, was aanvankelijk voorbestemd om zijn vader, een Luthers geestelijke, op te volgen. Zijn eerste activiteit was dan ook om het boek Genesis met wiskundige redeneringen te onderbouwen. Toen deze inspanning niet met succes kon worden bekroond wendde hij zich verder alleen tot de wiskunde. Hij werd opgemerkt door Gauss, wiens werk hij ook voortzette. In 1854 ontwierp hij een meetkundig systeem waarin voor evenwijdige lijnen geen plaats was. Het parallellenpostulaat was er niet van toepassing. Lijnen hadden altijd een snijpunt en de som van de hoeken van een driehoek was altijd minder dan een gestrekte hoek.

Geleidelijk kwamen de wiskundigen in de vorige eeuw tot het besef dat meerdere zinvolle meetkundige systemen naast elkaar konden bestaan, en dat de Euclidische meetkunde alleen om traditionele en praktische redenen de voorkeur verdiende. Het is eigenlijk nog maar de vraag welk meetkundig systeem in onze fysische wereld het beste werkt. Op kleine schaal natuurlijk de meetkunde van Euclides, de meetkunde die de Grieken van de lichtstralen hadden afgekeken. Maar op kosmische schaal? Het was weer Gauss die naar een antwoord zocht. Hij zocht drie onderling zichtbare, ver van elkaar verwijderde bergtoppen uit en mat van de aldus gevormde driehoek de drie hoeken op. Wanneer de som duidelijk meer of minder was dan 180 graden zou de natuur toch op grote schaal niet-Euclidisch zijn. Maar Gauss vond binnen de grenzen van de meetfouten geen afwijking van betekenis. Nu weten we dat er met kosmische driehoeken, waarvan de afmetingen in de miljoenen lichtjaren lopen, wel afwijkingen te verwachten zijn, en dat in overeenstemming met de wetten van de relativiteitstheorie de meetkunde in het heelal in het door Riemann voorziene stelsel past.

De meetkunde van Riemann pleegt men aan te duiden als *ellipti-*

sche meetkunde terwijl de meetkunde van Lobatsjefski en Bolyai wordt beschreven als *hyperbolisch*. Het zou te ver voeren om in te gaan op de wiskundige achtergrond van die benamingen. De meetkunde van Riemann heeft bij voorbeeld iets te maken met cirkels, ellipsen en bollen. De meetkunde op een bol vertoont ook een zekere analogie met de meetkunde van Riemann.

Een model van de elliptische meetkunde

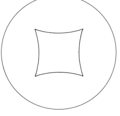
Zoals een rechte lijn in een plat vlak de kortste verbinding is tussen twee punten, geeft op een boloppervlak een grote cirkel gemeten over het boloppervlak de kortste afstand. Een grote cirkel op een bol kan men krijgen door de bol te snijden met een vlak door het middelpunt. Voor zover vliegtuigen geen voordelig gebruik maken van luchtstromingen, volgt hun route een grote cirkel.

Laten we een grote cirkel op een boloppervlak een 'rechte' noemen, waarbij de aanhalingstekens aangeven dat het om een nieuw begrip gaat dat analoog is aan een gewone rechte lijn in het platte vlak. Laten we een bolpunt te zamen met zijn diametraal tegengestelde 'punt' noemen. Zo tellen noordpool en zuidpool te zamen voor één 'punt'. We kunnen gemakkelijk nagaan dat door elk tweetal 'punten' precies één 'rechte' gaat en dat omgekeerd twee 'rechten' elkaar altijd in precies één punt snijden. Een verdere analyse laat zien dat de meetkunde op de bol precies de regels volgt van de niet-Euclidische meetkunde van Riemann. Het is een zogenaamd model binnen het systeem van de Euclidische meetkunde. Zo'n model van een wiskundig systeem binnen het raamwerk van een ander systeem is uiterst belangrijk. Het laat namelijk zien dat het gemodelleerde systeem consistent, vrij van tegenspraak, is wanneer bekend is dat het andere systeem dat ook is. De meetkunde van Riemann is dus net zo zinnig en net zo logisch als de gewone Euclidische meetkunde.

Door drie 'rechten' wordt een 'driehoek' gevormd welke in werkelijkheid een zogenaamde boldriehoek is, gepaard met zijn diametrale partner aan de andere kant van de bol. De hoekmeting komt overeen met de regels van de elliptische meetkunde. De som ven de hoeken van een driehoek is altijd kleiner dan een gestrekte hoek, 180 in graden of π in radialen. De lengte van de zijden van een 'driehoek' kan eveneens in graden of in radialen worden gemeten. Op aarde gebruiken we breedtegraden om de afstand tussen noordpool en zuidpool te overbruggen. De maximale afstand is dan ook π.

Een model van de hyperbolische meetkunde

Aan het einde van de vorige eeuw had men zich al behoorlijk vertrouwd gemaakt met de eigenschappen van de niet-Euclidische meetkunde. Dat was vooral het werk van Jules Henri Poincaré (1854-1912), een der belangrijkste wiskundigen van zijn tijd. Hij

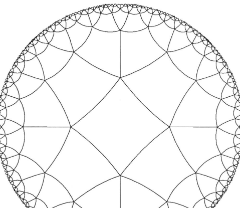


Figuur 6.3 Een hyperbolisch vierkant.

ontwierp een fraai model van de vlakke meetkunde van Lobatsjefski en Bolyai. Dit model is het binnengebied van een cirkel. De cirkel zelf symboliseert de oneindigheid, we noemen het de horizon. Een gewoon punt binnen de cirkel is een 'punt' in de hyperbolische meetkunde. Een punt op de cirkel is een oneindig ver 'punt'. Een hyperbolische 'rechte' is een boog van een cirkel die de horizon loodrecht snijdt. Uiteraard moeten we alleen dat gedeelte van die cirkel nemen welke binnen de horizon valt. Met deze afspraken kan een perfect model van de vlakke hyperbolische meetkunde worden opgebouwd. Een hyperbolische driehoek ziet er in dit model uit als een uit cirkelbogen opgebouwde Euclidische driehoek. Het mooie van dit model is dat de hyperbolische hoekmeting en de Euclidische hoekmeting hetzelfde zijn.

In figuur 6.3 hebben we aldus een hyperbolisch vierkant weergegeven. Men kan nameten dat de hoeken kleiner zijn dan negentig graden. We brengen nog even in herinnering dat in de Euclidische meetkunde de som van de hoeken van een driehoek altijd 180 graden bedraagt, en dat de som van de hoeken van een vierhoek altijd 360 graden is. Het kenmerk van de meetkunde van Lobatsjefski is juist dat die totalen minder zijn. In figuur 6.4 is de figuur voortgezet met nog een aantal hyperbolische vierkanten, op een zodanige wijze dat een regelmatig patroon ontstaat dat desgewenst tot aan de horizon voortgezet kan worden.

Alle hyperbolische vierkanten van dat patroon zijn even groot, tenminste wanneer ze gemeten worden volgens de normen van Lo-



Figuur 6.4 Een hyperbolisch regelmatig patroon van vierkanten.

batsjefski. In het model van Poincaré komt het erop neer dat de 'gewone' Euclidische meetlat steeds meer inkrimpt naarmate we ons van het centrum weg bewegen. Aan de cirkelvormige horizon, de onbereikbare hyperbolische oneindigheid, is de meetlat helemaal ineengeschrompeld tot een punt.

In de hyperbolische meetkunde kunnen de hoeken van een vierkant dus kleiner zijn dan negentig graden. Is de grootte van de hoek gegeven, dan ligt daarmee ook de grootte van het vierkant vast. De lengte van de zijden kunnen we dus uitrekenen. In de Euclidische meetkunde is dat niet zo. Daar zijn de hoeken precies negentig graden, maar kan het vierkant een willekeurige grootte hebben. Alle vierkanten zijn dan ook onderling gelijkvormig. In de hyperbolische meetkunde zijn hoek en zijde door elkaar bepaald. Hoe minder de hoek van negentig graden afwijkt, hoe kleiner de zijde is. Men zou kunnen zeggen dat bij oneindig kleine figuren in de hyperbolische meetkunde weer de Euclidische wetten gelden. In het model van Poincaré kunnen we dat goed begrijpen wanneer we letten op hele kleine figuurtjes in de omgeving van het centrum. De hyperbolische rechte lijnen zijn daar kleine cirkelboogjes die nauwelijks van rechte lijntjes zijn te onderscheiden.

Een regelmatig uit vierkanten opgebouwd patroon ziet er in de Euclidische meetkunde altijd eender uit, als een schaakbord. Maar in de hyperbolische meetkunde hebben we opeens meer mogelijkheden. Bij een regelmatig patroon van vierkanten kunnen in elk hoekpunt meer dan vier exemplaren bij elkaar komen. Is dat aantal bij voorbeeld vijf, dan werken we met hoeken van 72 graden, is dat aantal zes, dan zijn het vierkanten met hoeken van zestig graden, enzovoort. In figuur 6.4 is voor dat aantal vijf gekozen.

De oneindigheid van Escher

In 1954 werd in Amsterdam het vierjarige wereldcongres voor wiskundigen gehouden, een groots spektakel omgeven door vele culturele evenementen. In het Stedelijk Museum werd op initiatief van Nederlandse wiskundigen werk getoond van M.C. Escher, een toen nog vrijwel onbekend grafisch kunstenaar, en misschien is het deze tentoonstelling geweest die de aanzet zou vormen voor zijn latere roem. Escher had zich in zijn meer wiskundig getinte grafiek hoofdzakelijk beziggehouden met regelmatige vlakverdelingen, waarbij het platte vlak tot in het oneindige opgevuld kon worden met een regelmatig, zich telkens herhalend, patroon. Geliefkoosde motieven waren vogels, vissen en kruipend gedierte. Een van de bezoekers van de tentoonstelling was de meetkundige H.S.M. Coxeter van de universiteit van Toronto. Hij bleef in contact met Escher en wist hem enthousiast te maken voor de mogelijkheden van de hyperbolische meetkunde. Hun samenwerking resulteerde in een aantal fraaie prenten met de gemeenschappelijke naam 'Cirkellimiet'. Zelf schrijft Escher er in december 1958 het volgende over:

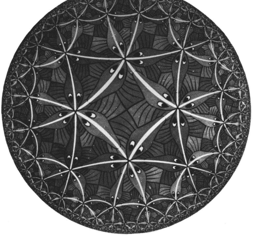
'...ben ik alweer verdiept in de bestudering van een plaatje, dat ik vond in een publikatie van professor H.S.M. Coxeter. Ik tracht daaruit een methode te peuren tot verkleining van een vlakvullingmotief van het centrum van een cirkel uit naar de randlimiet, waar de motiefjes oneindig dicht bij elkaar komen te staan. Aan zijn hokus-pokus tekst heb ik niets, maar het plaatje helpt mij waarschijnlijk tot het maken van een vlakverdeling, die een voor mij volkomen nieuwe variant belooft te worden van mijn serie vlakverdelingen. Een cirkelvormige regelmatige vlakvulling, die aan alle zijden logisch begrensd wordt door het oneindig kleine, is wel iets wonderschoons, haast even mooi als de regelmatige verdeling van een boloppervlak.'

Kleiner en kleiner

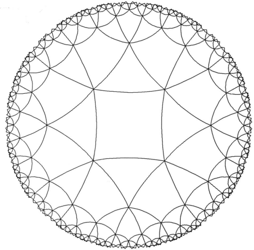
Al eerder had Escher gepoogd in zijn prenten iets van de oneindigheid weer te geven. In 1956 ontstonden de houtsneden 'Deling' en 'Kleiner en kleiner'. Beide prenten toonden een regelmatig patroon van figuren die naar het centrum toe steeds kleiner werden, terwijl ze naar de rand toe steeds groter werden. Logischerwijs was de voorstelling onbegrensd en zou zonder bezwaar naar het oneindige voortgezet kunnen worden, en dat hinderde Escher, die graag de lijst van een prent als een natuurlijke begrenzing van de voorstelling zag. Hoewel de meetkundige beschrijving van Coxeter voor hem ontoegankelijk was, zag hij aan de hand van de meetkundige illustraties dat de hyperbolische vlakverdeling in het model van Poincaré de oplossing was van zijn probleem de oneindigheid te vatten in de begrensde ruimte van een prent. In november 1956 ontstond 'Cirkellimiet 1', met een geschematiseerde vis als herhalingsmotief. Escher was er niet erg tevreden over, en hem stoorde vooral de geringe expressiviteit. In maart 1959 kwam de volgende variant, 'Cirkellimiet 2', tot stand, een krachtige voorstelling met een eenvoudig kruis als motief. Het zou een passende decoratie kunnen zijn in een kerk, maar het Vaticaan, daarop geattendeerd, toonde helaas geen belangstelling. Het hoogtepunt in deze serie bereikte Escher in december 1959 met een houtsnede in vijf kleuren, 'Cirkellimiet 3' (figuur 6.5). In de catalogus van zijn grote Haagse tentoonstelling zegt hij de gebreken van 'Cirkellimiet' grotendeels overwonnen te hebben: 'Er zijn nu alleen nog maar series met doorgaand verkeer, alle vissen van dezelfde serie hebben ook dezelfde kleur en zwemmen elkaar, kop aan staart, achterna langs een cirkelvormige baan van rand tot rand. Hoe dichter zij het centrum naderen, hoe groter zij worden. Vier kleuren zijn nodig opdat elke rij in haar geheel met de omgeving contrasteert. Geen enkele component van deze reeksen die van oneindig ver als vuurpijlen loodrecht uit de limiet opstijgen en er weer in teloorgaan, bereikt de grenslijn ooit.'

De wiskundige structuur van Eschers figuur is, althans voor een wiskundige, betrekkelijk eenvoudig. Het is gebouwd op een regel-

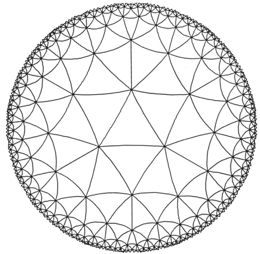
Figuur 6.5 Escher, Cirkellimiet 3.



Figuur 6.6 Een hyperbolisch patroon van vierkanten en driehoeken.



Figuur 6.7 Een regelmatig hyperbolisch tegelpatroon.



matige vlakverdeling waarbij het hyperbolische vlak is verdeeld in vierkanten en gelijkzijdige driehoeken. In elk hoekpunt komen om en om drie driehoeken en drie vierkanten samen. In figuur 6.6 hebben we aldus het kale wiskundige geraamte van Eschers kunstwerk als een computerconstructie weergegeven. Maar de wijze waarop Escher de artistieke aankleding in vorm en kleur heeft verzorgd, is hoogst uniek te noemen en dwingt aller respect af.

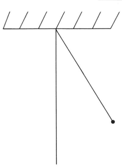
Escher probeerde zelf nog meer varianten te bedenken, en zo verscheen in 1964 'Vierkantlimiet', waarbij de cirkelvormige horizon van het model van Poincaré vervangen was door een vierkant. Vol trots zond hij de afbeelding naar Coxeter, maar de reactie was enigszins teleurstellend. De prent paste onvoldoende in het schema van de hyperbolische meetkunde, en de Canadese professor gaf toch maar de voorkeur aan de cirkellimieten.

Tegenwoordig is het niet zo moeilijk meer om regelmatige hyperbolische patronen van het cirkellimiettype zelf met behulp van een computer te ontwerpen. Figuur 6.7 toont een van de vele mogelijkheden. Het daarvoor gebruikte computerprogramma vereist echter kennis van zoveel wiskundige details, dat het hier onbesproken moet blijven.

7 STABILITEIT, ORDE EN CHAOS

In dit hoofdstuk vervolgen we onze beschouwingen over limieten, in het bijzonder over wat er gebeurt na een oneindig lange tijd. Het begrip limiet dienen we nu echter in uitgebreidere zin op te vatten, niet als een enkel punt of getal maar als een structuur, een patroon. In het volgende hoofdstuk bespreken we een belangrijk en wetenschappelijk heel actueel voorbeeld van een dergelijke limietstructuur, een zogenaamde vreemde aantrekker welke in de regel een fractal is. In het jargon van de wiskundige gaat het om de asymptotische eigenschappen van een dynamisch systeem. Dat behoeft uiteraard een nadere toelichting. Asymptotisch betekent dat we moeten letten op wat er op den duur gebeurt, op weg naar de oneindigheid dus.

Een dynamisch systeem



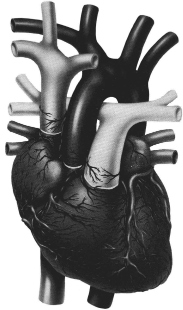
Figuur 7.1 Een slinger als dynamisch systeem.

Een dynamisch systeem is een systeem dat in de loop van de tijd een voortdurende of een stapsgewijze verandering ondergaat. Een eenvoudig voorbeeld is de slinger van een ouderwetse staande klok. Of neem maar eens een lang dun touw met een zwaar bolletje en bevestig het losse uiteinde aan het plafond van uw studeerkamer, breng het in slingering, en daar hebben we een dynamisch systeem (figuur 7.1). In dit geval is het een mechanisch systeem waarop mechanische krachten werken. Kracht is in het klassieke Grieks 'dunamis' en het betrokken vakgebied van de natuurkunde heet dan ook dynamica.

In een modern horloge stoppen we tegenwoordig een batterijtje. We zetten daarmee een dynamisch systeem in werking dat met elektrische krachten werkt. De draaiende, met wasgoed gevulde, trommel van de wasmachine is ook een dynamisch systeem, en laten we niet vergeten dat ons kloppende, levende hart ook als een dynamisch systeem kan worden opgevat. Onze aandacht is hier voornamelijk gevestigd op eenvoudige mechanische systemen die gehoorzamen aan de wetten van Newton en waarbij de zwaartekracht de belangrijkste rol vervult.

Bij een dynamisch systeem dient men in de regel te letten op evenwicht en op stabiliteit. Ook zonder definities van die begrippen te geven is het wel duidelijk wat daarmee wordt bedoeld. Een slinger in rust is een voorbeeld van zo'n evenwicht en we weten uit ervaring dat een kleine verstoring daarop nauwelijks invloed heeft, het is dus een stabiel evenwicht. Een koorddanser die op een gespannen touw een staande positie probeert te behouden bevindt zich in een instabiel evenwicht. Slechts door het uitvoeren van kleine compenserende bewegingen kan hij zich letterlijk staande houden. Een fietser in beweging is in een stabiele positie, maar zodra de beweging stopt gaat de stabiliteit over in instabiliteit, en dreigt de fiets om te vallen. Wanneer de was in onze wasmachine niet goed verdeeld is of wanneer de kogellagers versleten zijn, kan het apparaat in een instabiele toestand komen en neigingen tot dansen gaan vertonen. Een levensgevaarlijke situatie kan ontstaan wanneer onze hartfunctie instabiel wordt, door een hartinfarct bij voorbeeld. Er kan dan een situatie ontstaan van fibrillatie welke we wiskundig als chaos kunnen beschrijven (zie figuur 7.2).

Figuur 7.2 Een hart als dynamisch systeem.



Evenwicht is een toestand van orde en van regelmaat. Dat kan betrekking hebben op een in de tijd onveranderlijke toestand of op een ordelijke en eventueel periodieke beweging. Normaal gesproken bevindt ons kloppende hart zich altijd in een evenwichtstoestand waarbij zich een bepaald ritme heeft ingesteld. Door extra inspanning of emotie kan dat evenwicht even verstoord worden, ons hart gaat sneller kloppen of slaat een slag over, maar weldra herstelt zich weer de normale situatie van een dynamisch en stabiel evenwicht. Een stabiel evenwicht is bestand tegen kleine storingen. Een instabiel evenwicht is dat niet, en ook de kleinste storing brengt het systeem uit evenwicht en kan het dynamische systeem òf in een andere evenwichtstoestand brengen, òf het kan tot wanorde, tot chaos leiden.

Constructeurs en onderzoekers van dynamische systemen moeten altijd bedacht zijn op het vermijden van instabiele situaties. Dat geldt zowel voor heel eenvoudige zaken als een rijwiel, als voor de uiterst ingewikkelde ruimtevaartuigen. Zij dienen zich steeds af te vragen hoe een zich nog op de tekentafel bevindend instrument zich op den duur zal gedragen. Weliswaar is dat in de praktijk geen kwestie van oneindigheid, maar meer van een nabije toekomst. Evenwel kan men bij het theoretisch onderzoek de oneindigheid niet vermijden.

Een wiskundig model

Onderzoekers plegen een dynamisch systeem zo goed mogelijk te beschrijven in wiskundige termen als een wiskundig model. Dat is geen gemakkelijke opgave. Enerzijds streeft men naar eenvoud en wiskundige hanteerbaarheid, anderzijds wil men graag de werkelijkheid zo nauwkeurig mogelijk benaderen. We kunnen dat goed zien wanneer we proberen de slingering van een zwaar bolletje aan een lang koord in wiskundige termen te vatten. Als eerste benadering voor het wiskundige model vatten we het touw op als een volkomen buigzame oneindig dunne draad die geen massa bezit en vervolgens vervangen we het bolletje door een zware puntvormige massa, een bolletje van oneindig kleine afmetingen. Met deze veronderstellingen laat het probleem zich goed oplossen. Voor wie iets meer van wiskunde weet, vermelden we dat de beweging van de slinger volgens de wetten van Newton bepaald is door de differentiaalvergelijking

$$d^2x/dt^2 + \sin(x) = 0$$

een vergelijking die goed bekend is en waarvan de oplossingen zogenaamde elliptische functies zijn. Aan de hand van dat model kunnen we onderzoeken wat er gebeurt wanneer de tijd naar oneindig gaat. En inderdaad voorspelt het model dat de slingering op periodieke wijze eeuwig doorgaat. In werkelijkheid zal de slingering eens ophouden omdat er altijd geringe remmende krachten

optreden, de weerstand van de lucht bij voorbeeld.

Onder de veronderstellingen van het wiskundige model vindt er een voortdurende uitwisseling plaats tussen de energie van beweging en de potentiële energie. In de hoogste stand is de kinetische energie afwezig omdat het bolletje dan even stilstaat maar de potentiële energie is dan maximaal. In de laagste stand is de potentiële energie minimaal en is juist de kinetische energie het grootst. De som van beide energiesoorten blijft gedurende de beweging altijd constant. Natuurkundigen noemen die constante totale energie een behouden grootheid, een grootheid die 'geconserveerd' wordt. Een dusdanig mechanisch systeem noemt men dan ook een *conservatief* systeem. In werkelijkheid gaat er door bij voorbeeld wrijving altijd een klein beetje mechanische energie verloren en deze wordt omgezet in een andere vorm van energie als warmte. Men spreekt dan van energiedissipatie.

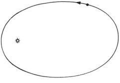
Ons zonnestelsel

Vanouds hebben wijze mannen getracht de gang van de hemellichamen aan het nachtelijk firmament te begrijpen en zo mogelijk te voorspellen. In de klassieke Oudheid had men door de vele waarnemingen al zoveel materiaal verzameld dat men in staat was soms een zons- of maansverduistering te voorspellen. Maar eerst Newton heeft ons getoond dat al die ingewikkelde bewegingen alleen maar berusten op een enkele gravitatiewet (figuur 7.3).

Figuur 7.3 Ons planetenstelsel.

Elk tweetal hemellichamen trekt elkaar aan met een kracht die evenredig is met de massa's van de twee lichamen en die omgekeerd evenredig is met het kwadraat van de onderlinge afstand. Newton begon zijn onderzoekingen met een sterk vereenvoudigd wiskundig model waarbij het zonnestelsel gereduceerd was tot twee elkaar aantrekkende puntvormige lichamen, een zogenaamd tweelichamenprobleem. Hij wist voor dat probleem een volledige oplossing te vinden en hij vond dat beide lichamen zich volgens ellipsvormige banen om een gemeenschappelijk zwaartepunt bewogen. Bovendien bleek dat zwaartepunt ook een brandpunt van de elliptische banen te zijn, precies zoals Kepler op grond van waarnemingen had vermoed. Omdat de massa's van planeten en kometen bijna verwaarloosbaar klein zijn ten opzichte van de massa van de zon, vallen hun onderlinge krachten in het niet vergeleken met de krachten welke de zon uitoefent. Het model van Newton, hoe idealistisch ook, kan dan ook met succes voor elke planeet en komeet toegepast worden. Het gemeenschappelijke zwaartepunt van alle massa's in het zonnestelsel valt dan ook praktisch samen met dat van de zon. De enige planeet die nog een geringe invloed zou kunnen hebben is Jupiter. Het model is zelfs van toepassing wanneer een uit het verre heelal afkomstige komeet een eenmalig bezoek aan ons zonnestelsel brengt, de baan is dan geen ellips maar een tak van een hyperbool (figuur 7.4).

Figuur 7.4 Newtons model van zon en planeet.



De bewegende objecten van het zonnestelsel vormen met elkaar weer een conservatief systeem waarin de som van kinetische en potentiële energie constant blijft. We kunnen dat nog even nader toelichten voor de beweging van een komeet om de zon. Wanneer de komeet dicht bij de zon is, is de potentiële energie laag en de snelheid navenant hoog, ver weg is het juist omgekeerd.

Een duistere reus

Sommige astronomen vermoeden dat zich ergens in de diepten van het heelal een metgezel van de zon bevindt, iets tussen een grote zware planeet en een kleine donkere zon in. Dat nog onbekende object, Nemesis genaamd, zou een omlooptijd in de orde van vele miljoenen jaren hebben. Wanneer het zich dicht bij de zon bevindt, wel buiten de baan van de verste planeet maar toch in de buurt van de zogenaamde Oort-wolk, de kinderkamer van de kometenmaterie, zou het een ernstig verstorende invloed op onze

aarde kunnen hebben. Het zou kunnen gebeuren dat kometen eruit losgerukt worden met de kans de aarde te treffen. We weten het niet, maar wat we wel weten is dat de aarde in het verre verleden meermalen door zware ruimtelijke 'rotsblokken' is getroffen en dat dit voor het aardse leven tot catastrofale gevolgen moet hebben geleid. We menen te weten dat het uitsterven van de reuzenhagedissen, de sauriërs, ook het gevolg is geweest van een dergelijke inslag. Voorlopig hoeven we niet bang te zijn. Het nog niet ontdekte object is in elk geval ver weg, heeft een grote potentiële energie en moet langzaam bewegen.

Storingen

Volgens de gravitatiewet oefenen de planeten op elkaar een invloed uit die op den duur heel belangrijk kan zijn. Jupiter als grootste planeet zal van een kleintje als Mars of onze aarde weinig last hebben, maar omgekeerd zal de beweging van de aarde wel degelijk een geringe maar meetbare storende invloed ondervinden van Jupiter. Hoe al die storingen in ons zonnestelsel in de verre toekomst doorwerken is een van de moeilijkste problemen van de zogenaamde hemelmechanica. Na Newton hebben vele wiskundigen zich ermee beziggehouden. Een van hen was Joseph Louis Lagrange (1736-1813), geboren in Turijn uit een Frans-Italiaanse familie. Hij vroeg zich af of de in het zonnestelsel aanwezige storingen niet tot fatale gevolgen konden leiden. Op grond van een soort benaderingsrekening bewees hij dat die storingen niet ernstig waren, met andere woorden dat het zonnestelstel stabiel was. Nu echter blijkt zijn bewijs maar van beperkte waarde te zijn en zeker wanneer er sprake is van miljoenen jaren kan geen enkele conclusie worden getrokken.

Lagrange hield zich in het bijzonder bezig met het zogenaamde drielichamenprobleem, een conservatief dynamisch systeem van drie elkaar aantrekkende massapunten. Hij kon er slechts onder zeer speciale voorwaarden een benaderde oplossing voor vinden, maar zijn resultaten zijn zeer waardevol gebleken, niet alleen voor de theorie maar ook voor de ruimtevaart in de twintigste eeuw. Zijn naam is nog heden ten dage verbonden aan zogenaamde Lagrangepunten, evenwichtsposities in de ruimte waar een kunstmaan gestationeerd kan worden als een soort permanent station.

Het is, ook voor deskundigen, moeilijk de complicaties van het drielichamenprobleem in zijn algemeenheid te begrijpen. Alles draait weer om het asymptotische gedrag van dat model, om wat er in de oneindig verre toekomst gebeurt. Is dat orde of chaos? Er zijn natuurlijk verschillende mogelijkheden. Wanneer de drie hemellichamen almaar op periodieke wijze om elkaar heen blijven bewegen, kunnen we spreken van een dynamisch evenwicht, een stabiele limietsituatie dus. Het zou ook kunnen gebeuren dat een van de drie lichamen het stelsel ontvlucht en er in zijn eentje vandoor gaat, in het oneindige verdwijnt, zeggen we. Weer een andere mogelijk-

heid is een botsing tussen twee deelnemers. In beide gevallen een instabiele situatie. De vraag is of er nog meer mogelijkheden zijn, maar daarop heeft men eerst in deze eeuw een voorlopig antwoord kunnen geven.

Een prijsvraag

In 1885, ruim honderd jaar geleden, schreef koning Oscar II van Zweden een prijsvraag uit:

Geef voor een willekeurig uit massapunten samengesteld systeem dat onderworpen is aan de wetten van Newton voor alle tijden de individuele posities van de massapunten in de vorm van coördinaten, waarbij elke coördinaat de som is van een oneindig voortlopende reeks van eenvoudige termen.

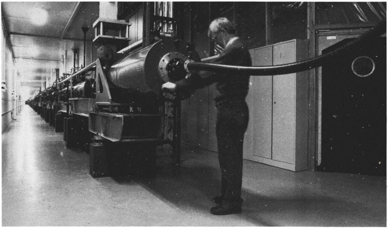
In die prijsvraag is het probleem van de beweging van de elementen van het zonnestelsel, inclusief kometen en asteroïden, op wiskundige wijze als een meerlichamenprobleem verwoord. De essentie van de vraag is de berekenbaarheid van de posities, ook in de verre toekomst, tot in het oneindige. Lagrange en zijn opvolgers in de eerste helft van de negentiende eeuw konden er niet goed uitkomen en eerst Henri Poincaré, een van de meest universele wiskundigen van zijn tijd, wist fundamenteel nieuwe resultaten te bereiken. Hij kon voor de posities van de massapunten weliswaar oneindig voortlopende reeksen afleiden, maar tegelijkertijd kon hij bewijzen dat die reeksen divergeerden, in zekere zin niet bestonden. Een negatief resultaat derhalve, dat Poincaré weliswaar geen wiskundige bevrediging, maar wel de prijs opleverde. Van Poincaré kan gezegd worden dat hij wellicht de laatste wiskundige was die beschikte over de volledige kennis van de wiskunde in zijn tijd, zowel van de meest zuivere aspecten als van de meest concrete toepassingen, zoals de theorie van eb en vloed. Poincaré is de grondlegger van de moderne theorie van de dynamische systemen, een theorie die gekenmerkt is door trefwoorden als orde, chaos en vreemde aantrekkers. Men zou kunnen zeggen dat Poincaré als eerste inzicht heeft gegeven in het oneindige van een dynamisch systeem.

Het belang van theoretisch onderzoek

Welke zin heeft het ons druk te maken over het gedrag van ons zonnestelsel in de oneindig verre toekomst? In werkelijkheid heeft ons zonnestelsel niet het eeuwige leven, omdat eens de zon aan het eind van zijn krachten zal zijn gekomen. Astronomen weten ons te vertellen dat op een bepaald moment in de verre toekomst de zon bijna al zijn brandstof zal hebben verbruikt en dan zal opzwellen tot een zogenaamde rode reus waarvan de afmetingen dusdanig zijn dat de huidige baan van de aarde er binnenin zal liggen. Het

leven op aarde is dan al lang verdwenen, maar misschien verdwijnt dat al veel eerder door menselijk falen. Een onaantrekkelijke toekomst, maar zo astronomisch ver weg dat we ons er niet druk over hoeven te maken.

Maar mensen zijn nu eenmaal weetgierig, en wat misschien niet voor ons zonnestelsel mogelijk is zou best ergens anders in de kosmos wel waar kunnen zijn. Er is echter een heel andere reden om toch door te gaan. Het meerlichamenprobleem is een heel fundamenteel wiskundig model dat op meer situaties toepasbaar is. De onderlinge wisselwerking van sommige elementaire deeltjes, zoals die bij voorbeeld in Genève bij de CERN bestudeerd wordt, is door net zo'n dynamisch systeem bepaald als een aantal bewegende en elkaar aantrekkende hemellichamen. Het kan daarbij gaan om een zogenaamde opslagring, een ringvormig kanaal van vele honderden meters waarin protonen rondcirkelen (figuur 7.5). Het technische probleem is om de bundel elementaire deeltjes een aantal uren bij elkaar te houden in een kanaal dat de grootte van een briefkaart heeft, terwijl die deeltjes tien tot honderd miljard keer rondlopen. Een soort miniatuur zonnestelsel waarbij de omlooptijd van een enkel deeltje vergeleken moet worden met de omlooptijd van een jaar voor onze planeet. Ons zonnestelsel is niet veel ouder dan zes miljard jaar. De analogie doortrekkend zouden we iets zinnigs moeten kunnen zeggen over de structuur van dat stelsel over honderd miljard jaar. Astronomisch weinig interessant zoals we gezien hebben, maar voor de stabiliteit van een bundel elementaire deeltjes een uiterst belangrijk en praktisch probleem.



Figuur 7.5 Een opslagring.

Het KAM-theorema

Voor niet-ingewijden is het verbazingwekkend te vernemen dat een drielichamenprobleem zoveel moeilijkheden kan geven. Dat zelfs Poincaré het niet echt kon oplossen zegt toch wel iets. Des te meer moeten we verbaasd zijn dat in 1963 een jonge Russische wiskundige, V.I. Arnold, dat drielichamenprobleem op wiskundig strenge wijze tot oplossing kon brengen. Zijn bewijs steunde uiteraard op reeds door Poincaré gelegde grondslagen, maar ook op werk van zijn leermeester A.N. Kolmogorov en van de Zwitserse wiskundige J. Moser. De kern van het bewijs staat nu bekend als de KAM-stelling, een acroniem gevormd uit de letters van de drie betrokkenen. Het zou te ver voeren die stelling in detail te bespreken, maar omdat oneindigheid er zo'n belangrijke rol in vervult, proberen we toch de essentie ervan enigszins beschrijvend weer te geven.

We stellen ons twee slingerende systemen voor die elk een periodieke beweging uitvoeren met de frequenties die de waarden f_1 en f_2 hebben. We nemen aan dat de systemen elkaar een beetje beïnvloeden, zodat er een mogelijkheid is van resonantie. Wanneer de verhouding f_1/f_2 een eenvoudige breuk is waarbij teller en noemer bij voorbeeld gevormd zijn uit de getallen 1, 2, 3, 4 dan is er sprake van resonantie en kunnen we ons voorstellen dat door een accumulatie van storingen in het totale systeem een instabiele situatie ontstaat. In het zonnestelsel nemen we dit waar bij de asteroïden die zich tussen Mars en Jupiter bevinden. De drie lichamen van het drielichamenprobleem zijn zon, Jupiter en een asteroïde. De verhouding f_1/f_2 is dan die van de omlooptijd van de asteroïde tot die van Jupiter. Uit statistisch onderzoek blijkt dat asteroïden waarvoor die verhouding een eenvoudige breuk is, relatief heel weinig voorkomen. In de vele miljoenen jaren van het bestaan van het zonnestelsel zijn ze ten gevolge van instabiliteit verdwenen, en waarschijnlijk zelfs op de zon geploft. Anders is het wanneer de verhouding f_1/f_2 ver weg van een eenvoudige breuk is, een onmeetbaar getal is, maar dan wel een onmeetbaar getal dat zich slecht door meetbare getallen laat benaderen. In die gevallen is volgens het KAM-theorema de resonantie afwezig en blijft de toestand voor alle tijden stabiel. Langs wiskundige weg kan men laten zien dat het bekende gulden snede getal van alle andere onmeetbare getallen het slechtst door eenvoudige breuken benaderd kan worden. Men kan zich voorstellen dat wanneer de verhouding f_1/f_2 daaraan gelijk is, $(-1+\sqrt{5})/2=.618$, de mate van stabiliteit het grootst is.

Een truc van Poincaré

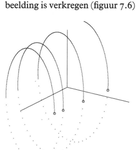
Bij zijn onderzoek van dynamische systemen probeerde Poincaré als een rechtgeaard wiskundige de theorie te verbinden aan een zo eenvoudig mogelijk wiskundig model. Dat model is een herhaalde afbeelding in een plat vlak, wiskundig beschreven als

(A)

$$x_{n+1}=f(x_n,y_n)$$
$$y_{n+1}=g(x_n,y_n)$$

Daarbij zijn x_n en y_n de coördinaten van een punt P met de index n. Met behulp van de functies f en g zijn we dan in staat de coördinaten van het volgende punt, met een index die 1 hoger is, te berekenen. Beginnen we met een gegeven punt P met de index 0 dan kunnen we op deze wijze een oneindige rij punten $P_0, P_1, P_2, P_3,\ldots$ genereren. De vraag is natuurlijk wat er in het oneindige gebeurt. Is dat orde of chaos, is de rij op den duur periodiek of onregelmatig, zijn er limietpunten, enzovoort. In het boek *Fractals* kan men een aantal van dergelijke modellen, zogenaamde discrete of iteratieve dynamische systemen, aantreffen. In het bijzonder verwijzen we naar een daarin beschreven experiment van M. Hénon. De door Poincaré gebezigde methode kunnen we als volgt toelichten. We nemen aan dat het oorspronkelijke probleem bepaald is door een stelsel differentiaalvergelijkingen zoals dat het geval is voor het drielichamenprobleem. Meetkundig gesproken komt het oplossen van een dergelijk probleem neer op het vormen van een ruimtekromme, een oneindig lange kronkellijn in een ruimte met een zeker aantal dimensies. Voor het gemak nemen we maar aan dat die ruimte identiek is met de ons vertrouwde driedimensionale ruimte. Poincaré beschouwt niet de hele kromme, maar alleen de snijpunten daarvan met een geschikt gekozen plat vlak. Laten we aannemen dat de kromme dat vlak voor de eerste maal snijdt in een punt P_0 en voor de tweede maal in P_1. De overgang van P_0 naar P_1 kan dan beschreven worden door het model (A). Het praktische probleem dat de functies f en g niet op eenvoudige wijze te bepalen zijn is voor de theorie niet bezwaarlijk. Het is daartoe voldoende die functies alleen kwalitatief te karakteriseren. De beschreven truc staat in de literatuur bekend als het aanbrengen van een Poincaré-doorsnede, en men zegt dat daardoor uit een ruimtelijk model, meestal een hogerdimensionale structuur, een Poincaré-afbeelding is verkregen (figuur 7.6).

Figuur 7.6 Een Poincaré-doorsnede.



Ter illustratie vermelden we hier het model van de zogenaamde 'standaard afbeelding'

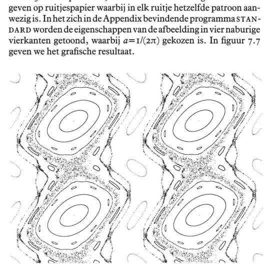
(B)

$x_{n+1} = x_n + a \sin(2\pi y_n)$

$y_{n+1} = x_n + y_n + a \sin(2\pi y_n)$

De daardoor beschreven iteratieve afbeelding is periodiek zowel in x als in y met de periode 1, en men zou de afbeelding kunnen weergeven op ruitjespapier waarbij in elk ruitje hetzelfde patroon aanwezig is. In het zich in de Appendix bevindende programma STANDARD worden de eigenschappen van de afbeelding in vier naburige vierkanten getoond, waarbij $a = 1/(2\pi)$ gekozen is. In figuur 7.7 geven we het grafische resultaat.

Figuur 7.7 Chaos en orde in een dynamisch systeem.



De interpretatie is als volgt:

Een punt dat bij de afbeelding op zijn plaats blijft of dat op periodieke wijze heen en weer springt betekent orde, een evenwicht dus.

Een punt dat een ringvormige baan beschrijft duidt eveneens op orde, maar betekent dat een zelfde situatie periodiek slechts op benaderde wijze bereikt wordt.

Een puntenwolk met een onregelmatige structuur duidt op instabiliteit, op chaos dus.

Het valt bij de bestudering van deze en dergelijke modellen steeds op dat gebieden met orde afgewisseld worden door gebieden met wanorde. Vaak ziet men hoe kleine gebieden van stabiliteit omgeven worden door chaotische wolken als een verstrengeling van orde en chaos. De betekenis voor de hemelmechanica zou kunnen zijn dat het soms maar weinig scheelt of een op drift geraakte

kunstmatige satelliet weer in onze buurt terugkomt of op meer chaotische wijze gaat rondzwerven door het heelal.

Laminaire stroming

We beginnen met een heel praktisch probleem, het verpompen van water of olie door een lange buis. Aan het begin zorgen pompen ervoor dat de in de buis aanwezige vloeistof voortgestuwd wordt en met een bepaalde gewenste snelheid v blijft stromen. De werking van de pompen kunnen we beschrijven als een voortstuwende druk die we p noemen. De ervaring wijst uit dat bij een grotere voortstuwende kracht ook een grotere stroomsnelheid behoort. Wanneer we goed opletten zullen we zien dat de vloeistof in de buis niet overal even snel stroomt. In het hart van de buis is de stroomsnelheid het grootst, maar bij de rand van de buis neemt de snelheid sterk af, en precies op de rand, aan de binnenkant van de buis dus, is de snelheid helemaal nul. Er bestaat een eenvoudige wiskundige formule

$$v=p(a^2-r^2)/(4\mu L)$$

afkomstig van de Franse fysioloog en arts Jean Leonard Marie Poiseuille (1799-1869), ook de uitvinder van de kwikmanometer om de bloeddruk te meten. In zijn formule heeft a de betekenis van de straal van de buis, r die van de afstand tot het hart van de buis en μ de viscositeit van de stromende vloeistof. Viscositeit is de mate van stroperigheid of waterigheid van de vloeistof. Dikke olie heeft een hoge viscositeit en water een lage. Ten slotte betekent L de lengte van de buis en heeft p betrekking op het drukverschil tussen begin en einde van de buis.

Zoals we nu wel begrijpen bestudeerde Poiseuille geen olie maar bloed, maar voor de natuurkundige problematiek maakt dat niets uit. De betekenis van Poiseuille's formule is dat de vloeistof als het ware met cilindrische schilletjes door de buis heen schuift. Meer naar binnen gelegen schillen bewegen snel en schillen aan de rand bewegen langzaam. De onderlinge schillen schuiven langs elkaar heen, wat met wrijving en verlies van bewegingsenergie gepaard gaat. Men noemt dat een gelaagde of laminaire stroming. De Engelse fysicus Osborne Reynolds (1842-1912) heeft zijn naam gegeven aan een grootheid die min of meer bepalend is voor het laminaire of turbulente gedrag van een gegeven stroming. Voor het bovenstaande geval van stroming door een buis wordt het zogenaamde getal van Reynolds gedefinieerd door de breuk av/μ. Een groot getal van Reynolds wil zeggen dat een gegeven stroming zich turbulent zal gaan gedragen. We kunnen dat zo interpreteren dat het turbulente gedrag toeneemt wanneer de stroomsnelheid toeneemt, de diameter van de buis toeneemt en de viscositeit afneemt (de vloeistof wateriger wordt).

Een soortgelijk verschijnsel kunnen we waarnemen bij een langzaam stromende rivier. Aan de oevers staat de stroming praktisch stil en halverwege is de stroomsnelheid het grootst.

We kunnen ons afvragen wat er gebeurt wanneer de stroomsnelheid geleidelijk aan opgevoerd wordt. Wanneer door een verhoogde wateraanvoer, door regenval bij voorbeeld, een rivier sneller gaat stromen, nemen we waar dat de rustige laminaire stroming overgaat in een woest en onregelmatig stromingspatroon dat op onvoorspelbare wijze steeds van vorm verandert. We spreken dan van een turbulente stroming. Bij de stroming door een buis is het niet anders. Zouden we bij het verpompen van olie of water steeds grotere krachten aanwenden dan gaat de laminaire voorspelbare stroming over in een turbulente chaotische beweging, in chaos zeggen we. Turbulente stroming is energieverslindend, dat kunnen we wel begrijpen wanneer we naar een woest stromende rivier kijken.

Rokers, maar ook niet-rokers, kunnen een aardig experiment uitvoeren dat op aanschouwelijke wijze de overgang van laminaire naar turbulente stroming illustreert. Men neme een brandende sigaret en men plaatst die op een asbakje zodanig dat er een pluimpje rook omhoog kringelt. Aanvankelijk is het pluimpje kaarsrecht, maar al vrij snel lijkt het onderhevig aan storingen en waaiert het onregelmatig uit. We hebben hier te maken met een aanvankelijk laminaire luchtstroming van opstijgende warme gassen, die bij toenemende snelheid turbulent wordt.

Laminaire en turbulente stroming zijn elkaars tegenpolen als orde en chaos. Wanneer een vloeistof zich gaat bewegen is het a priori onbekend hoe de stroming zich op de lange duur zal gaan gedragen. We stellen weer de bekende vraag: Wat gebeurt er in het oneindige? Is de stroming ten slotte ordelijk en regelmatig, laminair dus, of is de stroming ten slotte onregelmatig, chaotisch en dus turbulent? Wanneer het stromingspatroon aanvankelijk regelmatig is en wanneer die regelmaat tot in het oneindige bewaard blijft, heet de stroming *stabiel*. Stabiliteit is een belangrijk begrip in de mechanica, en het betekent altijd dat een zekere situatie, een evenwicht of een bepaald regelmatig patroon, bestand is tegen kleine storingen. Het alternatief is *instabiel*. Bij een instabiel evenwicht brengt zelfs de kleinste storing een permanente grote verandering teweeg. Bij instabiliteit denken we aan het gezegde dat kleine oorzaken grote gevolgen kunnen hebben.

Een aanvankelijk laminaire stroming blijkt alleen stabiel te zijn wanneer de stroomsnelheid niet al te groot is. Wordt bij de snelheid een bepaalde drempel overschreden dan treedt instabiliteit op, en gaat het stromingspatroon over in een turbulente en chaotische stroming.

8 VREEMDE AANTREKKERS

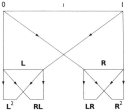
We zijn met dit hoofdstuk toegekomen aan wat misschien een van de meest fascinerende wiskundige begrippen is in het moderne computertijdperk. Recente computerexperimenten hebben ons gewezen op het bestaan van merkwaardige meetkundige limietstructuren die kort na hun ontdekking de naam kregen van 'strange attractors', of 'vreemde aantrekkers' zoals wij zouden zeggen. Ze blijken te voorschijn te komen bij dynamische systemen waarbij puntenrijen worden gevormd die in het oneindige een zekere stabiele structuur hebben. Het blijkt dat vreemde aantrekkers in de regel fractals zijn of een zekere fractale structuur hebben, dat wil zeggen gekenmerkt zijn door een soort zelfgelijkvormigheid tot in de kleinste details. We bespreken het onderwerp op historische wijze, waarbij de nadruk valt op de computerexperimenten van Lorenz en Hénon. Ten slotte laten we zien hoe de lezer zelf met de computer fraaie, vreemde aantrekkers kan vormen.

De verzameling van Cantor

In het boek *Fractals* hebben we ruim aandacht besteed aan de genoemde verzameling. De hoofdzaken kunnen we als volgt samenvatten. We gaan uit van een dynamisch systeem dat werkt op de reële getallen, meetkundig dus op de punten van de getallenlijn. Het punt O, de oorsprong, correspondeert met het getal 0 en het punt E is het beeldpunt van het getal 1. Een willekeurig punt P heeft een getallenwaarde x als de van teken voorziene lengte van het lijnstuk OP met OE als meeteenheid. Het bedoelde dynamisch systeem bestaat uit de twee transformaties **L** en **R** gegeven door

(A)
L $x \rightarrow x/3$
R $x \rightarrow x/3 + 2/3$

Zowel **L** als **R** zijn verkortende gelijkvormigheidstransformaties, zogenaamde contracties, met de verkortingsfactor 1/3. **L** is een centrale vermenigvuldiging met centrum O, **R** is ook zo'n trans-



Figuur 8.1 Schema van de gelijkvormigheidstransformaties van de Cantor-verzameling.

Figuur 8.2 De constructie van de Cantor-verzameling.

formatie, maar met centrum E. We zeggen dat O een dekpunt is van **L** omdat O bij die transformatie op zijn plaats blijft. Alle andere punten worden door **L** naar de oorsprong toegetrokken en dus verplaatst. Dat zelfde geldt voor **R** met betrekking tot E.

Het dynamische proces werkt aldus. Men gaat uit van een *willekeurig* beginpunt P_0 en men onderwerpt dat punt aan hetzij **L**, hetzij **R**. De keuze denkt men op toevallige wijze gemaakt, bij voorbeeld met kruis of munt door het werpen van een geldstuk. Men vindt dan een punt P_1 en dat onderwerpt men aan hetzelfde proces, weer met het gooien van een munt. Aldus ontstaat een oneindig voortlopende rij $P_0, P_1, P_2, P_3, \ldots$ Het blijkt dat het door de rij gevormde meetkundige patroon er op den duur altijd eender uitziet ongeacht waar we beginnen. Dat kunnen we wiskundig op betrekkelijk eenvoudige manier bewijzen en we kunnen het experimenteel verifiëren met een eenvoudig computerexperiment dat de lezer met het programma CANTOR1 zelf kan navolgen.

Het blijkt dat de puntenrij als het ware aangetrokken wordt door een vaste limietstructuur, een vreemde aantrekker. Die aantrekker is in dit heel eenvoudige geval niet zo vreemd, het blijkt een heel bekende reeds door Cantor beschreven puntverzameling te zijn die tegenwoordig de 'Cantor-verzameling' heet. Die verzameling bestaat uit oneindig veel losse punten, en het opmerkelijke is dat het er onaftelbaar oneindig veel zijn (figuur 8.1).

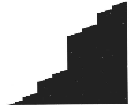
De Cantor-verzameling werd oorspronkelijk op een heel andere wijze gevormd. Die constructie kunnen we aflezen uit figuur 8.2. We gaan uit van een beginlijnstuk en daaruit laten we het middelste derde gedeelte weg. Er ontstaan dan twee kleinere lijnstukken en daaruit laten we ook weer de middelste derde delen weg, en zo gaan we almaar door tot in het oneindige.

Wanneer we de lengte van alle weggelaten delen bij elkaar optellen krijgen we de volgende reeks

$$1/3 + 2 \times 1/9 + 4 \times 1/27 + 8 \times 1/81 + \ldots$$

een meetkundige reeks waarvan we de som van oneindig veel termen gemakkelijk kunnen berekenen als precies 1. We zouden kunnen zeggen dat we na oneindig veel stappen alles verwijderd hebben met uitzondering van wat losse punten, telkens de begin- en eindpunten van de bij elke stap overblijvende lijnstukjes. We zouden moeten concluderen dat de puntverzameling van Cantor geen lengte heeft maar toch uit onaftelbaar veel punten bestaat, volgens Cantor net zoveel als het eenheidslijnstuk, het Continuum, waarmee we zijn begonnen. Als een verzameling van losse punten heeft de Cantor-verzameling de topologische dimensie 0, maar zoals we misschien weten kunnen we de Cantor-verzameling ook opvatten als een fractal, een verzameling met een gebroken dimensie die in dit geval .6903 bedraagt.

Er is een aardige manier om de Cantor-verzameling af te beelden. Bij de besproken meetkundige constructie hebben we dus



Figuur 8.3 De duivelstrap van Cantor.

telkens het middelste stuk van een lijnstukje weggenomen. Dat wegnemen doen we nu door het lijnstuk omhoog te schuiven en wel tot een niveau dat bepaald is door het midden van het lijnstuk. Bij de eerste stap wordt het lijnstuk (1/3,2/3) dus naar het niveau 1/2 gebracht. Bij de tweede stap gaat het lijnstuk (1/9,2/9) naar de hoogte 1/6 en schuift het lijnstuk (7/9,8/9) naar 5/6. Ten slotte ontstaat aldus een trapvormige gebroken lijn, een trap met oneindig veel vlakke treden. Draaien we de hele figuur een kwartslag dan ontstaat een trap met oneindig veel steile treden, die in de literatuur bekend staat als 'de duivelstrap'. Met het programma CANTOR2 kan die trap op eenvoudige wijze op het beeldscherm worden verkregen. Het resultaat is afgebeeld in figuur 8.3.

De onvoorspelbaarheid van het weer

Het ideaal van elke meteorologische dienst is om het weer van de komende dagen nauwkeurig te kunnen voorspellen. Vroeger lukte dat niet zo best en toen werd er gezegd dat men bij gebrek aan waarnemingsstations onvoldoende gegevens had om het weer goed te kunnen voorspellen. Eens was men slechts aangewezen op mededelingen van zeekapiteins op de gebruikelijke scheepvaartroutes, maar nu zijn er weersatellieten die de weersgesteldheid van oceanen en continenten onze huiskamers binnenbrengen. Bovendien zijn krachtige supercomputers voortdurend bezig om de talloze gegevens te verwerken en om er toekomstverwachtingen op te kunnen baseren. Ondanks al dit technische geweld is het met de weersverwachting nog steeds slecht gesteld. Het zou beter moeten. Immers, de bewegingen van de luchtmassa's zijn onderworpen aan eenvoudige natuurwetten die zich zonder moeite in een wiskundige vorm laten brengen. Men kan inderdaad een goed wiskundig model van de meteorologische verschijnselen maken, en men zou het best aan de supercomputer kunnen overlaten, maar toch... Er is blijkbaar iets fundamenteels mis, en eigenlijk heeft men pas sinds kort begrepen waarom het weer principieel slecht voorspelbaar is. Dat inzicht heeft men verworven aan de hand van sterk gereduceerde meteorologische modellen.

Het model van Lorenz

In 1963 bestudeerde de natuurkundige en meteoroloog Edward N. Lorenz een dergelijk model. Het oorspronkelijk ingewikkelder model beschreef in de vorm van een aantal differentiaalvergelijkingen luchtstromingen boven een verwarmd aardoppervlak. Opmerkelijk is dat dergelijke modellen ook een heel andere interpretatie toelaten. Het model van Lorenz zou ook de vloeistofstroming in een op het vuur staand pannetje water kunnen beschrijven. Voor diegenen die met het begrip differentiaalvergelijking vertrouwd zijn, geven we hieronder het door Lorenz bestudeerde vereenvoudigde model

(B)
$dx/dt = -\sigma x + \sigma y$
$dy/dt = rx - y - xz$
$dz/dt = -bz + xy$

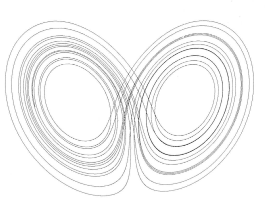
De grootheid r heeft de betekenis van het getal van Reynolds, dat in de stromingsleer de mate van turbulentie karakteriseert. Overigens nam Lorenz de speciale waarden $\sigma = 10$ en $b = 8/3$. Los van zijn fysische betekenis kunnen we het model van Lorenz interpreteren als het vormen van een ruimtelijke kromme, waarbij een punt P met de coördinaten (x,y,z) in de loop van de tijd t een baan beschrijft. De vraag is weer wat er op den duur, in het oneindige, gebeurt, en of het stelsel stabiel of instabiel is. En ook vragen we ons af of we de positie van P in de verre toekomst kunnen berekenen wanneer de beginpositie gegeven is. Een bekende stelling in de wiskunde zegt dat dit principieel altijd mogelijk moet zijn, maar over de technische problemen bij die berekening zegt die stelling niets, en daar blijkt nu juist de problematiek in te schuilen.

Het experiment van Lorenz

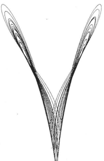
Lorenz begon vol goede moed te experimenteren. Omdat het stelsel vergelijkingen niet tot een bekend met eenvoudige formules hanteerbaar type behoorde, was hij aangewezen op numerieke methoden en het gebruik van de computer. Hij begon eerst met een lage waarde van het Reynolds-getal r. Tot aan de waarde 24.7 bleek het systeem altijd tot een stabiel evenwicht te leiden. Anders gezegd, welke beginpositie men voor het punt P ook koos, de door P beschreven kromme eindigde altijd in een limietpunt. Een volstrekt ordelijke situatie dus, die we kunnen vergelijken met een laminaire stroming van vloeistof in een kanaal of in een buis. De stroming ziet er in het evenwicht altijd eender uit.

Nam Lorenz echter de hogere waarde $r=28$, dan bleken er vreemde, onverwachte dingen te gebeuren. Het punt P bleek rusteloos met kleine en grote lussen heen en weer te springen om nimmer tot rust te komen, chaos dus. Maar het bleek ook dat onafhankelijk van de gekozen beginsituatie de chaos op het beeldscherm van de computer er altijd eender uitzag. Wat Lorenz zag is weergegeven in figuur 8.4. Het is uiteraard de projectie van een ruimtelijke structuur en het geeft maar een incompleet beeld van de werkelijkheid. Figuur 8.5 geeft een andere projectie.

Natuurlijk kon Lorenz niet oneindig lang doorgaan, maar wanneer hij nog heel lang doorgegaan zou zijn zou hij toch altijd dezelfde structuur hebben gezien. Het doet denken aan een fractal, een oneindig gedetailleerde meetkundige figuur. Wiskundig spreken we heel algemeen van een limietverzameling of van een aantrekkende verzameling, kortweg aantrekker. Maar omdat de aantrekker van Lorenz zo uitzonderlijk was – wiskundigen hadden zoiets nog nooit gezien – is men het een 'vreemde aantrekker' ('strange



Figuur 8.4 Frontale projectie van de Lorenz-aantrekker.



Figuur 8.5 Zijdelingse projectie van de Lorenz-aantrekker.

attractor') gaan noemen. Ter ere van Lorenz heet de figuur nu de 'Lorenz-aantrekker' (afgekort LA). Idealiter is LA een beeld van een chaotische oneindigheid. LA is een welgedefinieerde verzameling van limietpunten. Laten we een baan ergens beginnen dan wordt de baan steeds meer door LA aangetrokken en gaat er steeds meer op lijken. Starten we een baan in een punt van LA dan blijft de baan verder ook tot LA behoren, en is met andere woorden een deel van LA.

De merkwaardige door Lorenz gevonden limietfiguur is historisch gesproken de eerste 'strange attractor'. Achteraf heeft men zich gerealiseerd dat de verzameling van Cantor opgevat kon worden als een wat primitievere vreemde aantrekker, of liever als het eendimensionale prototype van alle vreemde aantrekkers in vlak en ruimte. De Lorenz-aantrekker kan men als getoond in de figuren 8.4 en 8.5 zien als zich bevindend op de pagina's van een boek dat een beetje is opengeslagen. Er zijn oneindig veel pagina's, de lussen lopen op onregelmatige wijze links en rechts over de pagina's heen en weer, en zijn onderling in de rug van de boekband verbonden. Zou men met een oneindig dunne naald dwars door alle pagina's heen steken dan zouden de snijpunten op de naald een Cantorachtige verzameling vormen, een zeer verwant familielid van de boven besproken Cantor-verzameling. Degenen die zich met dit soort problemen bezighouden, spreken daarom van een 'Cantor-boek'.

Computerexperimenten

In de Appendix bevinden zich twee computerprogramma's met de naam LORENZ, met behulp waarvan de lezer de experimenten van Lorenz kan navolgen. Die experimenten komen pas tot hun volle recht wanneer men alle mogelijkheden het programma te versnellen volledig uitbuit. Dus liefst een snelle computer en bij voorbeeld

Turbo Basic. Bij deze programma's heeft men de mogelijkheid voor r, σ en b willekeurige waarden te nemen. Ook bij de projectie heeft men vrijheid van keuze. In het eerste programma, LORENZ1, worden van de Lorenz-kromme vier verschillende projecties getoond op de wijze van de bovenstaande twee illustraties. Bij de eerste en frontale projectie ziet men hoe het baanpunt telkens een linker- of een rechterlus doorloopt. Men zou bij een linkerlus kunnen denken aan een regendag en bij een rechterlus aan een zonnige dag. Het model laat dan zien hoe zonnige en regenachtige perioden elkaar op onregelmatige wijze afwisselen. Zoals een linkerlus vaak wordt gevolgd door een linkerlus, wordt een regendag vaak gevolgd door weer een regendag. Op de lange duur is het niet mogelijk te voorspellen of het baanpunt zich links of rechts bevindt. Zo zijn weersvoorspellingen op lange termijn even problematisch.

In het tweede programma, LORENZ2, wordt gedemonstreerd hoe buitengewoon gevoelig het model van Lorenz is voor kleine veranderingen. We kiezen daartoe een aantal, tien bij voorbeeld, beginposities die onderling heel weinig verschillen. Elk van die tien punten doorloopt zijn eigen baan, maar alle banen vloeien ten slotte te zamen in de Lorenz-aantrekker. Men zou kunnen denken dat de tien baanpunten in hun reis door de ruimte ook bij elkaar zouden blijven, zo van eens bij elkaar altijd bij elkaar. Maar niets is minder waar. Integendeel, de punten blijken onderling steeds meer contact te verliezen en ten slotte elk hun eigen weg te gaan. Sommige gaan naar links, andere naar rechts op onvoorspelbare wijze. Er bestaat een videofilm afkomstig van H.-O. Peitgen, getiteld 'Fly Lorenz', waarin het beschreven verschijnsel op fraaie wijze als een film voor ons vertoond wordt. Het programma LORENZ2 doet in feite hetzelfde, maar wordt in zijn werking wel beperkt door de begrenzingen van de computer. Het gevonden effect van de extreme gevoeligheid van het systeem voor hele kleine veranderingen aan het begin blijkt ook bij veel andere modellen voor te komen. Het is nu goed begrepen en goed bestudeerd. Bij een model als dat van Lorenz is de toekomst ondubbelzinnig door een gegeven beginpositie bepaald, het model heet dan ook deterministisch. Maar in de praktijk resulteert een kleine verandering van de beginpositie ten slotte altijd in een grote storing.

Het vlindereffect

De extreme gevoeligheid van een wiskundig model voor een kleine storing noemt men wel het vlindereffect. We moeten ons daarbij voorstellen dat het al of niet fladderen van een vlinder ergens in Brazilië bepaalt of het honderd jaar later in de Sahara regent of niet. Dus kleine oorzaken met op de lange duur grote gevolgen. Er bestaat een mooi verhaal van Ray Bradbury, de meesterschrijver van science fiction. Hij beschrijft in een verre toekomst een reisorganisatie, 'Time Travel', die safari-tochten in de prehistorie organiseert. Een gezelschap begeeft zich aldus in de tijd van de grote

sauriërs. Het hoogtepunt is natuurlijk een ontmoeting met de tyrannosaurus rex. Uiteraard is de reisorganisatie zich bewust van de problemen van oorzaak en gevolg, en de reizigers hebben ook de meest strenge richtlijnen om niets in het verleden te verstoren. Kijken mag, en ook fotograferen, maar niets mag beroerd worden. Helaas stapt een der reizigers een beetje mis en verplettert daarbij een prehistorische vlinder. Hij verzwijgt het maar en het gezelschap keert ongehinderd weer in het heden terug bij de vertrekhal van 'Tyme Travel'. Het valt de ongelukkige reiziger op dat de spelling wat ongewoon is, en de laatste krant lezend blijkt er ook een andere president te zijn, want niet de democraten maar de republikeinen hadden de verkiezingen gewonnen.

Het model van Verhulst

In het boek *Fractals* is enige aandacht besteed aan het zogenaamde model van Verhulst. Het model beschrijft geremde groei waarbij x_n een maat is voor het aantal individuen, insekten bij voorbeeld, van de generatie met het rangnummer n. Door een passende keuze van eenheden heeft x_n altijd een waarde tussen 0 en 1. Het model is

(C)

$$x_{n+1}=ax_n(1-x_n)$$

waarbij a de mate van vruchtbaarheid beschrijft. Voor a kunnen we een waarde tussen 0 en 4 nemen. Het model is een zogenaamd iteratief systeem, wat wil zeggen dat we met dezelfde formule achtereenvolgens de waarden $x_1, x_2, x_3, \ldots$ kunnen uitrekenen mits de beginwaarde x_0 gegeven is. Het model doet in de verte enigszins denken aan dat van Lorenz, maar het is veel eenvoudiger. Ook dit model is deterministisch, omdat door een gegeven beginwaarde x_0 een willekeurig latere waarde x_n ondubbelzinnig bepaald is, hoe groot n ook is. We kunnen a vergelijken met het getal van Reynolds, r in het model van Lorenz. Een lage waarde van a betekent orde tot in het oneindige, een hoge waarde van a betekent turbulentie, wanorde of chaos, hoe men het ook wil noemen. Net als bij het model van Lorenz vertoont ook dit model het vlindereffect. Dat kunnen we zelf op experimentele wijze onderzoeken met behulp van het programma VERHULST in de Appendix. In dat programma kan voor a een willekeurige waarde worden genomen, maar gekozen is $a=4$. We gaan uit van twee zeer dicht bij elkaar gelegen beginwaarden x_0 en x_0' die onderling slechts .000 000 01 verschillen. Het programma laat door berekening zien dat bij elke volgende stap het verschil aangroeit, totdat na zo'n 25 generaties x_n en x_n' zoveel verschillen dat er eigenlijk geen verband meer tussen bestaat. Wanneer het model een biologische interpretatie zou toelaten, zouden we kunnen zeggen dat de dood van een enkele vlinder na 25 jaar zou kunnen leiden tot een jaar met weinig of met veel vlinders.

Het model van Verhulst kan in een vorm gebracht worden die sterk lijkt op het model (A) waarmee we begonnen zijn. We beginnen met het speciale geval $a=4$ dat geen wiskundige complicaties met zich meebrengt. Het idee is om de puntenrij P_n teruglopend te vormen, een werkwijze die wiskundigen inverteren noemen. Om de vergelijking

(D)
$$x' = ax(1 - x)$$

te kunnen inverteren dienen we deze als een vierkantsvergelijking in x op te vatten waarbij x' als bekend kan worden verondersteld. Voor de oplossing is slechts de bekende wortelformule nodig, welke twee mogelijkheden geeft

L $x \rightarrow (1 + \sqrt{(1 - x)})/2$
R $x \rightarrow (1 - \sqrt{(1 - x)})/2$

geschreven in de notatie van (A). In het oorspronkelijke model van Verhulst leidde een gegeven punt of waarde x in voorwaartse zin tot een enkele opvolger. Het blijkt nu dat een enkel punt P of x-waarde twee voorgangers heeft. Zouden we verder terug willen gaan dan verdubbelt bij elke ronde het aantal voorgangers zich, zoals dat trouwens ook bij het eenvoudige model (A) van Cantor het geval was. Men zou op grond van de analogie kunnen verwachten dat alles uiteindelijk naar een zekere limietstructuur, een aantrekker toegaat. Wie hoopt op een vreemde aantrekker komt helaas bedrogen uit want de punten blijven zich op chaotische wijze verdelen over de volle lengte van het eenheidsinterval [0,1] inclusief de eindpunten.

In het menselijke leven en ook in de wiskunde moet men na een enkele teleurstellende ervaring niet meteen de moed opgeven. Men zou immers met een uitzonderingsgeval te maken kunnen hebben. En dat blijkt inderdaad het geval te zijn. Alleen $a=4$ en $a=2$ blijken uitzonderingsgevallen te zijn, alle andere waarden (natuurlijk moet a van 0 verschillen) leiden tot iets bijzonders, een vreemde aantrekker, een fractal, een Julia-verzameling.

Julia-verzamelingen

In het boek *Fractals* is dit type verzameling uitvoerig besproken, zodat we er hier kort over kunnen zijn. Deze verzamelingen zijn bepaald door herhaalde afbeeldingen in het platte vlak, en ze kunnen wiskundig heel elegant beschreven worden met de rekenwijze van de complexe getallen. Ook dat wordt in het vermelde boek uitgelegd. Het komt erop neer dat een complex getal een combinatie is van twee reële getallen x en y, welke opgevat kunnen worden

als de coördinaten van een punt in het vlak. Het complexe getal schrijven we in de vorm $a + ib$ waarbij de i de zogenaamde imaginaire eenheid is. Met complexe getallen kunnen we gewoon rekenen volgens de regels van de algebra met als enige conventie dat $i^2 = -1$. Voor ons is van belang dat een vierkantsvergelijking in de wereld van de complexe getallen altijd twee wortels heeft. Zo heeft

$$x^2 + x - 1 = 0$$

de twee reële wortels

$$x = (-1 \pm \sqrt{5})/2$$

en heeft

$$x^2 + x + 1 = 0$$

de complexe wortels

$$x = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$$

Bij het inverteren van het Verhulst-proces (D) doet zich het technische probleem voor dat bij het telkenmale oplossen van een vierkantsvergelijking bijna als vanzelf complexe wortels ontstaan. De meetkundige consequenties zijn dat de zich steeds verdubbelende rij voorgangers van een gegeven beginpunt zich in het platte vlak gaat uitbreiden en naar een limietstructuur toegaat, die bijna altijd een vreemde aantrekker is, een structuur die al omstreeks 1919 door de Franse wiskundige Gaston Julia uitvoerig in algemener verband bestudeerd werd, en die nu te zijner ere een 'Julia-set' of Julia-verzameling genoemd wordt.

Wanneer $a=4$ hebben we inderdaad een zeer uitzonderlijke situatie. De vierkantswortels zijn voor reële getallen altijd uitvoerbaar, complexe getallen hebben we niet nodig, de aantrekker blijft tot de reële getallenlijn beperkt, de Julia-verzameling is slechts het lijnstuk [0,1]. Als $a=2$ dan hebben we een ander soort uitzondering. De aantrekker van het geïnverteerde proces van Verhulst blijkt een gewone cirkel te zijn, wel mooi maar niet vreemd. In alle andere gevallen krijgen we fraaie vreemde aantrekkers die gewoonlijk als Julia-fractals te boek staan.

Teneinde aansluiting te vinden bij de gebruikelijke notatie van dit type Julia-verzamelingen moeten we de vergelijking (D) in een andere vorm brengen. We schrijven dan

(E)
$$z' = z^2 + c$$

Daarbij is

$$c = a/2 - (a/2)^2$$

De uitzonderingsgevallen zijn nu $c = -2$ en $c = 0$. De omkering van (E) wordt nu

(F)

L $z \to \sqrt{(z-c)}$

R $z \to -\sqrt{(z-c)}$

en in deze vorm wordt het in computerprogramma's gebruikt. In het volgende hoofdstuk zullen we zien wat we met een eenvoudige computer kunnen bereiken. In het bijzonder lette men op het programma JULIAS waarin de formules (F) worden toegepast.

De aantrekker van Hénon

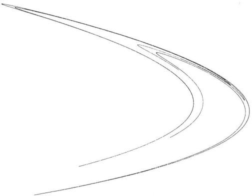
De Franse astronoom Michel Hénon heeft in verband met de hemelmechanica een paar interessante computerexperimenten uitgevoerd. In 1976 bestudeerde hij een ogenschijnlijk eenvoudige iteratieve afbeelding in het platte vlak, bepaald door de vergelijkingen

(G)

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2$$
$$y_{n+1} = bx_n$$

waarbij a en b vrij te kiezen getallen zijn. Hénon nam de waarden $a = 1.4$ en $b = .3$ en onderzocht de baan van het beeldpunt van (x_n, y_n) in het platte vlak voor willekeurig gekozen beginpunten. Sommige banen bleken in oneindige verten te verdwijnen, maar wanneer dat niet zo was bleken ze er ten slotte allemaal eender uit te zien. Ze leken aangetrokken te worden tot een merkwaardige structuur die uit parabolische bogen bleek te bestaan. Tegenwoordig hebben we het over de 'Hénon-aantrekker', zoals getoond in figuur 8.6. Het viel Hénon op dat die aantrekker uit dicht tegen elkaar geplaatste lijnen leek te bestaan. Het was moeilijk te zien, het oplossend vermogen van het beeldscherm, waarop punten altijd kleine cirkelvormige vlekjes zijn, is beperkt, en van het oneindige aantal punten waaruit de echte aantrekker bestaat kunnen we maar een verwaarloosbaar aantal realiseren. Van een klein gedeelte van de aantrekker maakte Hénon een vergroting, dat ging wel gepaard met meer rekenwerk, maar het lukte heel goed, en het resultaat verkregen met behulp van een microcomputer zien we in figuur 8.7.

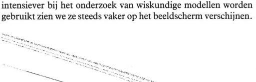
Er blijkt een soort fijnstructuur te zijn waarbij de samenstellende bogen van de limietfiguur als bladerdeeg tegen elkaar liggen. Uiteraard kan men verdere deelvergrotingen maken als een voortdurend inzoomen met de computer. De rekentijd neemt toe, maar het merkwaardige is dat we eigenlijk niets nieuws meer zien. Bij elke volgende deelvergroting zien we ongeveer hetzelfde, een herhaling van hetzelfde patroon, het karakteristieke kenmerk van een zelfgelijkvormige fractal. Met behulp van de programma's HE-



Figuur 8.6 De aantrekker van Hénon.

NON1 en HENON2 kan de lezer de experimenten van Hénon herhalen. Het eerste programma geeft een totaalbeeld. Afhankelijk van de snelheid van de computer kan men het aantal binnen redelijke tijd te plotten punten kiezen. Een aantal van liefst enige duizenden is wel nodig. Het tweede programma geeft een klein detail als in figuur 8.7. Daarvoor zijn meer punten nodig, liefst enige tienduizenden. In beide programma's kunnen ook de parameters a en b gewijzigd worden.

De beschreven aantrekker van Hénon is een der eerste voorbeelden van een merkwaardige limietstructuur die men nu 'vreemde aantrekker' noemt. Het blijkt een algemeen voorkomend verschijnsel te zijn. Vreemd is het niet meer, en nu computers steeds intensiever bij het onderzoek van wiskundige modellen worden gebruikt zien we ze steeds vaker op het beeldscherm verschijnen.



Figuur 8.7 Een zelfgelijkvormig detail van de Hénon-aantrekker.

Wanneer we ons beperken tot dergelijke lijnvormige aantrekkers die bepaald zijn door een iteratieve vlakke afbeelding van de vorm

(H)
$x \rightarrow f(x,y)$
$y \rightarrow g(x,y)$

dan kan reeds een enkel instabiel evenwichtspunt of dekpunt aanleiding geven tot het ontstaan van een vreemde aantrekker. Belangrijk is dat er in de omgeving van dat dekpunt twee voorkeursrichtingen zijn, een richting waarin een punt zich zo snel mogelijk van het evenwicht verwijdert en een richting waarin een punt juist naar het evenwicht toegaat. Stellen we ons voor dat we als het ware meelopen in de richting van de maximale afstoting dan blijken we een ingewikkelde kronkellijn te volgen die al kronkelend steeds meer langere en dunnere lussen gaat vormen. Langs de kronkellijn lopend merken we daar niet veel van, maar wanneer we even opzij kijken zien we bogen van naburige lussen die al eerder gepasseerd zijn. De kronkellijn is oneindig lang en kronkelt oneindigvoudig. Elk stukje van de kronkellijn wordt door de transformatie (H) getransformeerd in een ander stukje van dezelfde lijn op min of meer gelijkvormige wijze. Elke haarspeldbocht geeft aldus aanleiding tot nog een haarspeldbocht. Een enkele lus geeft aldus aanleiding tot oneindig veel andere lussen. Wanneer we ergens dwars door een rij van tegen elkaar aangedrukte lussen heen gaan, krijgen we een rij van snijpunten welke gerangschikt blijken te zijn als de punten van de klassieke Cantor-verzameling.

De merkwaardigheden van deze door Hénon gedane ontdekking zijn van grote stimulerende waarde geweest voor de moderne wiskunde. De moderne vakliteratuur staat vol met artikelen over 'strange attractors', 'Julia-sets', fractals, chaos en orde, allemaal zaken die veel met elkaar te maken hebben. Men zou het kunnen zien als een soort analyse van meetkundige oneindigheid, als een poging antwoord te geven op de vraag hoe een bewegend systeem zich na oneindig lange tijd gedraagt. Inmiddels heeft men veel meer inzicht gekregen in de genoemde verschijnselen, al blijven er nog vele raadselen op te helderen.

Zelfgelijkvormigheid

We hebben al enige malen te maken gehad met het verschijnsel van zelfgelijkvormigheid in een meetkundige structuur. In beginsel geeft elk iteratief proces of oneindigvoudig herhaald dynamisch systeem daartoe aanleiding. Het gaat daarbij steeds om een almaar herhaalde transformatie welke neerkomt op een meetkundige vervorming. In het algemeen moeten we het begrip gelijkvormig niet al te letterlijk nemen, figuren kunnen soms behoorlijk vervormd worden. Een bekend voorbeeld van zo'n transformatie is de Mercator-projectie, afkomstig van de Vlaamse toegepast wiskundige

en kartoloog Gerard de Kremer (1512-1594) (Latijns *mercator* betekent koopman). Gebieden in de buurt van de evenaar hebben onderling een correcte verhouding, maar in de poolstreken is een gebied als Groenland sterk vergroot en vervormd weergegeven. In het boek *Fractals* is aan de zelfgelijkvormigheid veel aandacht besteed omdat die eigenschap bij vele fractals de meest opvallende karakteristiek is. Overigens behoeft een fractal niet noodzakelijk zelfgelijkvormig te zijn, maar de mooiste en meest bekende of meest interessante zijn dat juist wel. Om de veelheid van mogelijkheden enigszins te beperken, beschouwen we hier alleen iteratieve transformaties van de vorm

$$x \rightarrow f(x,y)$$
$$y \rightarrow g(x,y)$$

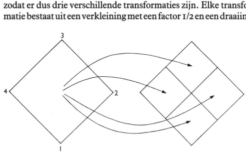
welke dus herhaalde afbeeldingen van het platte vlak op zichzelf beschrijven. De modellen (F) van Hénon en (G) van Julia zijn van die vorm. In beide gevallen is er sprake van zelfgelijkvormigheid, maar er zijn ook typische verschillen. Bij de herhaalde Hénon-afbeelding lijkt het erop dat er langs de parabolische bogen van de aantrekker sprake is van uitrekking terwijl er dwars op een verkorting is.

Computerexperimenten met een vierkant

Ter afsluiting van dit hoofdstuk bespreken we een klasse van zelfgelijkvormige vreemde aantrekkers of fractals die met eenvoudige wiskundige hulpmiddelen op het computerscherm verkregen kunnen worden. Het principe is als volgt. We gaan uit van een vierkant dat in vier gelijke, kleinere vierkanten is verdeeld als geïllustreerd in figuur 8.8.

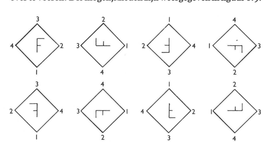
We stellen ons voor dat zich in het grote vierkant een fractal bevindt die gelijkvormig met zichzelf is wanneer het grote vierkant door een gelijkvormigheidstransformatie in een deelvierkant overgaat. We gebruiken daarbij drie van de vier kleinere vierkanten, zodat er dus drie verschillende transformaties zijn. Elke transformatie bestaat uit een verkleining met een factor 1/2 en een draaiing.

Figuur 8.8 Fragmentatie van een vierkant.



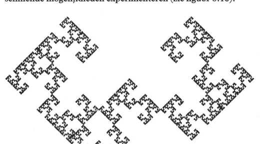
Om de constructie eenvoudig te houden, laten we alleen draaiingen over negentig graden toe, dus ongewijzigd, kwartslag linksom, omdraaiing en kwartslag rechtsom. Bovendien combineren we de rotatie eventueel met een spiegeling. Totaal zijn er dus acht mogelijkheden om het grote vierkant aldus in een kleiner vierkant over te voeren. Die mogelijkheden zijn weergegeven in figuur 8.9.

Figuur 8.9 Acht mogelijkheden om een vierkant te plaatsen.



Voor elk van de deelvierkanten hebben we zo'n transformatie zodat er dus in totaal $8 \times 8 \times 8$ of 512 combinaties mogelijk zijn. Bij elke combinatie hoort een limietfiguur of aantrekker. In de meeste gevallen hebben we te maken met een vreemde aantrekker met een typisch fractale structuur, maar er zijn speciale gevallen waarbij de aantrekker niet vreemd en niet interessant is. Met behulp van het in de Appendix gegeven programma SQUARE kan men met de verschillende mogelijkheden experimenteren (zie figuur 8.10).

Figuur 8.10 Een voorbeeld van het programma SQUARE.



9 ONEINDIG MET DE COMPUTER

De computer is een machtig hulpmiddel geworden om te rekenen en te tekenen waar de normale menselijke mogelijkheden te kort schieten. Met de computer kunnen we langer doorrekenen en kunnen meetkundige figuren tot in de kleinste details geanalyseerd worden. Natuurlijk zijn ook de mogelijkheden van zelfs de beste computer beperkt, en kunnen we niet oneindig lang doorgaan. Maar we kunnen wel veel verder komen dan we vroeger voor mogelijk hadden gehouden. De oneindigheid lijkt dichterbij te zijn gekomen en we worden soms beloond met een blik op een paradijs van schoonheid, zoals de wonderbaarlijke figuren van Mandelbrot.

Het lijkt paradoxaal dat een computer ons inzicht zou kunnen geven over zaken die met de oneindigheid in verband staan. Een computer kent geen onmeetbare getallen, en meetbare getallen kunnen slechts met een beperkte nauwkeurigheid gehanteerd worden. De kwaliteit van meetkundige figuren is afhankelijk van het oplossend vermogen van het beeldscherm. Voor berekeningen, hoe snel ook, is maar een beperkte tijd beschikbaar.

Maar toch kan, vooral in handen van een wiskundige, een computer ons nuttige diensten bewijzen bij het analyseren van wiskundige modellen waarbij de vraag beantwoord moet worden hoe het model zich op den duur, op weg naar oneindig, gedraagt.

Bovendien zijn er belangrijke theoretische vragen die betrekking hebben op de technische uitvoerbaarheid van een bepaalde gecompliceerde berekening. We kúnnen immers niet oneindig lang doorrekenen. Een optimist zou kunnen denken dat elk wiskundig probleem met een computer opgelost zou kunnen worden wanneer we er maar lang genoeg aan rekenen. Een pessimist houdt rekening met de mogelijkheid dat er wiskundige problemen bestaan die zelfs met de beste computer niet binnen eindige tijd tot oplossing kunnen worden gebracht. Helaas blijken de pessimisten gelijk te hebben, en merkwaardigerwijze is men zich daarvan al in 1930 bewust geworden, een tijd waarin er nog geen elektronische computers bestonden.

In dat jaar ontwierp de Engelse wiskundige en logicus Alan Mathison Turing (1912-1954) een abstracte computer, als het ware het prototype van alle computers, waarvan het voornaamste element een lees- en schrijfeenheid was met een oneindig lang lint van nullen en enen. Met een dergelijke abstracte computer was Turing in staat een willekeurige algoritme, een stap voor stap rekenmethode, uit te voeren en te analyseren. Zijn rekenmachine werkte eveneens stap voor stap. Bij elke stap werd een cijfer 0 of 1 gelezen en werd een eventueel nieuw cijfer aangebracht. Wanneer de Turing-machine stopte, was de berekening klaar en was het gestelde probleem 'computable'.

Turing liet zien dat er problemen waren waarmee zijn computer oneindig lang bezig moest zijn. Nu, ruim vijftig jaar later, zijn er talloze elektronische rekenmachines beschikbaar, van eenvoudige PC's tot grote getallenkrakers. Inmiddels zijn we ons ervan bewust dat er problemen zijn die ook met de beste en krachtigste futuristische computer onoplosbaar zullen blijven. Overigens heeft Turing later zijn beste krachten gegeven aan de ontwikkeling van de eerste elektronische rekenmachines, en wel omstreeks 1950 aan de universiteit van Manchester met de Ferranti Mark 1. In de tussenliggende oorlogsjaren was hij werkzaam bij de Engelse geheime dienst als expert in het breken van de meest geheime Duitse en Japanse codes. Het verhaal gaat dat dank zij deze dienst de Engelsen al lang op de hoogte waren van de plannen van de Japanse aanval op Pearl Harbour, maar dat Churchill de Amerikanen daarvan onkundig liet omdat hij hoopte ze aldus bij de wereldoorlog te kunnen betrekken. Het is een speculatieve, maar wel interessante gedachte dat het werk van een wiskundig filosoof een keerpunt kan betekenen in de loop van de historie.

Praktische berekenbaarheid

Het is zaak met de beschikbare computers en de toegestane tijd zo zuinig mogelijk om te gaan. Stel dat we een groot aantal, zeg n, getallen hebben en dat we met behulp van een algoritme daarvan het grootste getal willen bepalen. Het is dan van belang een idee te hebben van de benodigde rekentijd in afhankelijkheid van n. Stel dat het voor duizend getallen 1 seconde duurt, hoeveel tijd kost het dan om het grootste van een miljoen getallen te bepalen? Om daarover iets te zeggen moeten we nagaan hoeveel 'elementaire' stappen de door ons gebruikte algoritme nodig heeft. Wat een elementaire stap is doet niet veel ter zake, laten we zeggen een optelling, aftrekking, vermenigvuldiging en deling van twee getallen, of een vergelijking van twee getallen. Een beginnend programmeur zou het gestelde probleem misschien als volgt beredeneren. Je moet elk getal met elk ander getal vergelijken, en dat komt neer op het onderzoek van $n(n-1)/2$ getallenparen. De rekentijd $T(n)$ zal dus wel

bij benadering evenredig zijn met n^2, en hij komt tot een formule in de geest van

$$T(n)=cn^2$$

waarbij c een constante is die afhangt van de soort rekenmachine. Een dergelijke formule betekent dat de rekentijd met een factor 4 omhoog gaat wanneer het aantal getallen verdubbeld wordt. Nog steeds in de veronderstelling dat die formule voor de door ons gebezigde algoritme juist is, zou voor $n=1\,000\,000$ de rekentijd een miljoen seconden bedragen, iets als twaalf dagen stug rekenen.

Juist omdat we in de praktijk niet oneindig lang kunnen rekenen is het van groot belang te weten hoe voor een bepaalde algoritme de oneindigheid wordt bereikt. Een wiskundige vraagt in zijn taal naar het asymptotisch gedrag van de rekentijd. Hoe neemt $T(n)$ toe wanneer n naar oneindig gaat? In het gegeven voorbeeld zeggen we dat de door ons gebezigde algoritme het asymptotische gedrag n^2 heeft.

Wanneer de rekentijd voor een gewenste waarde van n te groot is moeten we òf een betere algoritme verzinnen, òf een snellere computer nemen. In het bovenstaande voorbeeld kunnen we het zeker beter doen. Laten we even uitgaan van 64 getallen. Verdeel ze in 32 hoopjes van twee en neem van elk hoopje de grootste. Dat zijn 32 elementaire stappen en er zijn 32 getallen overgebleven. Maak hiervan zestien stapeltjes van twee en neem weer telkens de grootste. Er komen zestien elementaire stappen bij en er zijn zestien getallen over. Zo gaan we verder totdat er nog maar één getal over is, en dat is het gezochte maximum. Het aantal elementaire stappen is $32+16+8+4+2+1$ of praktisch 64, het oorspronkelijke aantal. Duidelijk is dat voor n punten ongeveer n elementaire stappen nodig zijn. De nieuwe algoritme is dus van de orde n, veel beter dan wat we daarvoor bedacht hadden. Het bepalen van het maximum van 1 000 000 getallen zou met de betere algoritme nog maar een kwartier bedragen.

Het probleem van de handelsreiziger

Het probleem is voor een handelsreiziger een zo zuinig mogelijke route te vinden welke hem langs een aantal te bezoeken steden brengt die onderling door wegen verbonden zijn. Wanneer het aantal steden, zeg n, vrij groot is moet men wel een computer gebruiken om uit de grote veelheid van mogelijkheden de beste reisroute te vinden. Weer vragen we ons af hoe voor een bepaalde rekenmethode de rekentijd T afhangt van het aantal te bezoeken steden. De eenvoudigste methode is om gewoon alle mogelijke routes te bekijken en voor elke route het totaal aantal kilometers te berekenen. Die met het kleinste aantal is de beste. Nemen we gemakshalve aan dat elke stad rechtstreeks met elke andere stad is verbonden, dan levert het bezoeken van vier steden al $4!=1\times2\times3\times4$

of 24 routes op. Een slimmerd zal misschien opmerken dat dat aantal door 2 gedeeld kan worden omdat elke route op twee manieren gevolgd kan worden. Maar we zullen weldra zien dat we daar niet veel mee opschieten. Met tien steden zitten we al op 3 628 800 mogelijkheden en met twintig steden zelfs op een getal van negentien cijfers of ongeveer 2.433E18 in de gebruikelijke computernotatie. We vermoeden voor $T(n)$ een formule als

$T(n)=cn!$

waarbij $n!$ (spreek uit n faculteit) de gebruikelijke notatie is van $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n-1) \times n$. Wanneer n, het aantal te bezoeken steden, iets als 25 is, voor een echte handelsreiziger een heel realistisch aantal, lijkt het probleem zelfs met de beste computer volkomen onoplosbaar. De sport is dus om slimme algoritmen te bedenken waarbij de orde een minder snelle groei van n heeft. Talloze scherpzinnige wiskundigen hebben letterlijk honderden artikelen aan dat probleem gewijd, en eigenlijk hebben ze nog steeds geen voor alle situaties geschikte algoritme gevonden. In 1962 kon men het bezoeken van dertien steden maar ternauwernood aan, maar dank zij een wat betere algoritme en een betere computer kon men in 1970 tot $n=40$ komen. Sindsdien is men nog weer verder gekomen, maar het 'travelling salesman' probleem is en blijft een berucht lastig probleem.

De orde van oneindigheid

Bij de bovenstaande voorbeelden hebben we gezien hoe de rekentijd van een algoritme die op een willekeurig aantal objecten, dat we n noemen, betrekking heeft, afhangt van dat aantal. Met weglating van een evenredigheidsfactor die trouwens machine-afhankelijk is kunnen we de rekentijd beschrijven met bij voorbeeld n of n^2 of 2^n enzovoort. We noemen dat een orde van oneindig worden. Wanneer n toeneemt, neemt de rekentijd gelijkelijk of sneller toe. Gerangschikt naar de snelheid waarmee de rekentijd aangroeit hebben we onder andere de volgende mogelijkheden

$\log n, \sqrt{n}, n, n^2, n^3$

en

$2^n, 3^n, n!, n^n$

De laagste soort groei is de logaritmische waarbij de rekentijd evenredig is met de logaritme van n. Wanneer het aantal n met factoren 2, 3, of 10 toeneemt dan gaat de rekentijd slechts met kleine gelijke stapjes omhoog. Terwijl n de rij 10, 100, 1000, 10 000 enzovoort doorloopt groeit T aan als 1, 2, 3, 4,... Een algoritme met een logaritmische orde is dus buitengewoon goed te noemen.

Een groei die beschreven wordt met termen als n, n^2, n^3 enzovoort pleegt men polynomiaal te noemen, waaraan eventueel de exponenten zoals 1, 2 en 3 als graad worden toegevoegd. Polynomiale algoritmen zijn in het algemeen goed bruikbaar en de rekentijd blijft in de praktijk doorgaans beheersbaar. Anders is het gesteld met de niet-polynomiale groei, de exponentiële groei als 2^n en 3^n, en het ergste van alles de faculteitsgroei zoals die voorkomt bij het probleem van de handelsreiziger.

Exponentiële groei

De kenmerken van exponentiële groei kunnen we het beste duidelijk maken aan de hand van een voorbeeld. We beschouwen een zogenaamde populatie van levende wezens, de konijnen op het Australische continent bij voorbeeld, en we letten op de toename van het aantal individuen in de loop van de tijd. Het is handig er een klein wiskundig model van te maken waarbij x_n het aantal individuen is op het tijdstip n, op een peildatum van het n-de jaar. Wanneer we precies een jaar verder zijn is er door natuurlijke aanwas, geboorte minus sterfte, een aantal individuen bijgekomen dat evenredig is met het totale aantal van het vorige jaar. Noemen we de evenredigheidsfactor a dan is de bevolkingstoename dus gelijk aan ax_n. Anderzijds kunnen we de aanwas beschrijven als $x_{n+1} - x_n$. We komen aldus tot de gelijkheid

$$x_{n+1} - x_n = ax_n$$

of liever

(A)

$$x_{n+1} = (1 + a)x_n$$

De allereenvoudigste veronderstelling is dat a een constante is. Dat wil zeggen dat de relatieve bevolkingsaanwas constant is en niet beïnvloed wordt door externe factoren. In de praktijk betekent dit dat er altijd voldoende voedsel en levensruimte beschikbaar is. Een heel eenvoudige berekening laat zien dat het model (A) opgelost wordt door

$$x_n = x_0(1 + a)^n$$

een resultaat waarvan we de juistheid gemakkelijk kunnen verifiëren. De functie $(1 + a)^n$ neemt in afhankelijkheid van n op exponentiële wijze toe. De wiskundige verklaring van deze bewering is vervat in de formule

$$(1 + a)^n = \exp(bn)$$

waarbij

$$b = \log(1 + a)$$

en $\exp(x)$ is de exponentiële functie. In gewone taal kunnen we zeggen dat bij exponentiële groei de tijd n met gelijke intervallen toeneemt terwijl het aantal x met gelijke factoren toeneemt. Het kenmerk van exponentiële groei is ook dat het aantal zich telkens na verloop van een vaste periode in de tijd verdubbelt. In het bovenstaande wiskundige model is die periode gelijk aan $\log(2)/\log(1 + a)$. Is bij voorbeeld a gelijk aan .1 dan is de verdubbelingsperiode gelijk aan 7.27. Tellen we n in jaren dan wil dat zeggen dat na zeven jaar de bevolking zich bijna heeft verdubbeld.

Hetzelfde model kan men ook interpreteren als de aangroei van een kapitaal dat uitstaat op een vaste samengestelde rente van $100a$ in procenten. Het rekenvoorbeeld wil dan zeggen dat het kapitaal met een percentage van tien procent in ruim zeven jaren wordt verdubbeld. Zou de rentevoet slechts vijf procent bedragen dan zouden we meer dan veertien jaar op verdubbeling moeten wachten. Tot welke schijnbaar paradoxale gevolgen de exponentiële groei kan leiden wordt geïllustreerd aan de hand van een aantal anekdotes, zoals die van de uitvinder van het schaakspel.

Schaken met exponentiële groei

Toen dit edele spel aan koning Shirham van India werd gepresenteerd was hij dermate enthousiast dat hij zich bereid toonde elk redelijk verzoek van de uitvinder in te willigen. De schaakmeester, ongetwijfeld een wiskundige en bekend met de exponentiële groei, vroeg 'slechts' een beloning in natura, en wel een aantal graankorrels. Voor het eerste veld van het schaakbord 1 korrel, voor het volgende veld 2, en daarna 4, 8, 16, 32,... enzovoort tot aan het laatste, vierenzestigste, veld. Het leek de vorst een zeer bescheiden wens, en hij aarzelde dan ook geen moment het verzoek in te willigen en prompt werden de magazijnmeesters van de koninklijke graanschuren aan het werk gezet. Weldra openbaarde zich een nationale ramp toen bleek dat de landelijke voorraad graan bij lange na niet voldoende was om aan de ogenschijnlijk redelijke vraag te voldoen. Wanneer het graan verdeeld zou moeten worden over de bevolking, zeg honderd miljoen personen, dan zou ieder een paar miljoen kilo graan moeten krijgen.

Laten we het even narekenen. Het totaal aantal graankorrels is gelijk aan $2^{64} - 1$. Nemen we daarvan de logaritme met grondtal 10 dan komt er 19.266 en blijkt dat aantal een getal van twintig cijfers te zijn. Een precieze berekening geeft overigens

18 446 744 073 709 551 615

Wanneer we aannemen dat er vijftig korrels in een gram gaan dan correspondeert dat aantal met 3600 miljard ton. Ter vergelijking, in 1965 produceerde Canada achttien miljoen ton tarwe. Twintigduizend van dergelijke jaarprodukties zijn dus nodig om aan de vraag te voldoen.

Het is inderdaad heel moeilijk om op intuïtieve wijze een idee te krijgen van exponentiële groei. Ook grote getallen zeggen ons weinig. Kortom, op weg naar oneindig laat ons voorstellingsvermogen ons spoedig in de steek.

Nog een voorbeeld van meer financiële aard. Laten we eens aannemen dat Rembrandt ter wille van zijn verre nakomelingen tien gulden naar de spaarbank heeft gebracht tegen een rente van vijf procent. Als jaar van inleg kiezen we 1642, het jaar waarin de 'Nachtwacht' werd voltooid. Nu zijn we 347 jaar verder. Met de bovenstaande formule vinden we snel dat het kapitaal tot meer dan 225 miljoen gulden zou zijn aangegroeid. Zou prins Willem van Oranje in 1533 op analoge wijze een spaarbankboekje hebben meegekregen dan zou het huidige kapitaal al 46 miljard gulden bedragen, en dat alles ondanks een enorme geldontwaarding.

Recursief bepaalde groei

We denken wel eens dat nog vreemde voor ons onbekende zaken begrijpelijk worden wanneer we er een naam aan hebben gegeven en er een notatie voor hebben bedacht. Archimedes dacht al na over wat we nu het aantal elementaire deeltjes in het heelal zouden noemen. Archimedes stelde zich het heelal voor als een reusachtige bol, en hij berekende het aantal zandkorreltjes dat nodig zou zijn om de ruimte geheel te vullen. Daartoe moest hij een nieuwe getallennotatie bedenken. Hij kwam daarbij tot een 'myriade myriaden eenheden van de myriade-myriadeste orde van de myriade-myriadeste periode'. Het grootste getal in zijn systeem zouden we tegenwoordig schrijven als tien tot een macht die bestaat uit een acht gevolgd door zestien nullen.

Tegenwoordig hebben we wel een betere getallennotatie, maar ook die schiet te kort wanneer we heel grote getallen willen voorstellen. De beste methode is om gebruik te maken van een recursieve definitie. Zo kan de snel aangroeiende faculteitfunctie $n!$ recursief gedefinieerd worden door

$$x_{n+1} = nx_n$$
$$x_1 = 1$$

Voor alle waarden van n kan x_n, de faculteitfunctie $n!$, worden uitgerekend, maar om voor een bepaalde waarde van n die functie echt uit te kunnen rekenen moet de functie voor alle vorige waarden van n al eerder berekend zijn. Zo kan x_7 op de volgende wijze worden bepaald:

$$x_7 = 7x_6 \qquad x_3 = 3x_2$$
$$x_6 = 6x_5 \qquad x_2 = 2x_1$$
$$x_5 = 5x_4 \qquad x_1 = 1$$
$$x_4 = 4x_3$$

Rijgen we de gelijkheden al teruglopend (Latijns *recurrere* betekent teruglopen) aan elkaar dan vinden we snel in de gewone getallennotatie $x_7=5040$. Door de bovenstaande recursieve betrekking is de faculteitfunctie voor alle waarden van n bepaald zonder dat er een getallennotatie aan te pas komt, en dat is wel prettig want we komen vrij spoedig in de problemen wanneer n groot wordt; zo is 20! al een getal van negentien cijfers. We zetten de recursieve definities van de belangrijkste soorten van groei nog eens onder elkaar:

lineaire groei	$x_{n+1} = xn + a,$	$a>0$
exponentiële groei	$x_{n+1} = a\,x_n,$	$a>1$
faculteitsgroei	$x_{n+1} = n\,x_n$	
superexponentiële groei	$x_{n+1} = x_n^{\,2}$	

Om te zien hoe de recursie werkt voor de nog niet eerder besproken superexponentiële groei beginnen we met de keuze $x_1=2$. Een eenvoudige berekening geeft

$x_2=4$
$x_3=16$
$x_4=256$
$x_5=65\ 536$
$x_6=4\ 294\ 967\ 296$
$x_7=18\ 446\ 744\ 073\ 709\ 551\ 616$

Het laatste getal kunnen we veel beter schrijven in de vorm

$x_7=2^{64}$

en dan herkennen we het als 1 meer dan het aantal graankorrels op het schaakbord van de oosterse legende. De superexponentiële groei komt bij wiskundige problemen, bij Julia-fractals bij voorbeeld, nogal eens voor. Ondanks het technische bezwaar van een onvolmaakte getallennotatie is deze vorm van groei wiskundig beheersbaar, juist omdat er zo'n eenvoudige recursieve bepaling aan ten grondslag ligt.

Ten slotte beschouwen we de groeiwet

$x_{n+1}=2\ \hat{}\ x_n$
$x_1=1$

(het teken ^ is het computersymbool voor machtsverheffen). Een kleine berekening geeft nu

$x_2=2$
$x_3=4$
$x_4=16$
$x_5=2^{16}$
...

maar nu gaan notatie en voorstellingsvermogen ons echt in de steek laten. We kunnen nog wel schrijven

$x_6=2 \hat{} 2 \hat{} 2 \hat{} 2 \hat{} 2$

te lezen van rechts naar links, maar veel zegt dit niet.

Het is niet moeilijk nog veel meer groeiwetten te verzinnen met een al of niet recursieve definitie. Maar welke wet we ook nemen, elke rij voert ons langs aftelbaar oneindig veel stappen naar de absolute oneindigheid. Volgens Cantor zijn alle rijen onderling gelijkwaardig. In de praktijk is het echter belangrijker te weten hóe we naar de oneindigheid toegaan.

De functie van Ackerman

Bij computerberekeningen pleegt men graag gebruik te maken van recursieve definities. We hebben bij de bovenstaande recursief gedefinieerde groeiwetten gezien hoe eenvoudig dat gaat. De recursiviteit is een kenmerk van een hogere programmeertaal, Pascal bij voorbeeld, daartoe ondersteund door een zogenaamde compiler. De compiler ontleedt de recursieve definities in reeksen van elementaire bewerkingen, een activiteit die zich gewoonlijk op de achtergrond afspeelt en waar de meeste programmeurs geen weet van behoeven te hebben. Helaas leiden recursieve definities in de regel tot tijdrovende bezigheden in het interne van de computer, waarbij geheugencapaciteit en snelheid beperkende voorwaarden zijn. Om de mogelijkheden van een bepaalde computer uitgerust met een wiskundig besturingssysteem te kunnen toetsen, laat men de computer een zekere recursief gedefinieerde functie berekenen, een zogenaamde functie van Ackerman. Die functie zouden we kunnen zien als een groeiwet die getallen produceert die heel snel aangroeien. Het is te voorzien dat de computerberekening snel vastloopt en de vraag is natuurlijk hoe ver een bepaalde computer met de berekening kan doorgaan. Hier geven we een kleine variant van de Ackerman-functie, die eenvoudiger is dan de gebruikelijke versie en toch alle essentiële kenmerken bezit.

Het principe doet weer enigszins denken aan de legende van het schaakbord. De velden van het schaakbord nummeren we nu van links naar rechts met de index m, terwijl we de rijen van onderen naar boven nummeren met een tweede index n. Het veld (5,4) zou dus in schaaknotatie als $e4$ aangeduid worden. De genoemde functie noteren we als $A(m,n)$ en we geven de volgende recursieve definitie

$$A(m,n)=A(m-1,A(m,n-1))$$

aangevuld met

$$A(1,n)=2n$$
$$A(m,1)=2$$

De velden op de eerste rij van het schaakbord dragen dus alle het getal 2, en de velden van de verticale linkerrij van onderen naar boven (de a-rij van het schaakbord) bevatten de reeks 2, 4, 6, 8, 10,... (zie figuur 9.1).

12						
10	32					
8	16	65 536				
6	8	16	65 536			
4	4	4	4	4	4	
2	2	2	2	2	2	2

Figuur 9.1 Schakend naar de oneindigheid.

De waarden van A op de tweede verticale rij van links (de b-rij van het schaakbord) kunnen we afleiden door in de recursieve definitie $m=2$ te nemen. Er komt dan

$$A(2,n)=A(1,A(m,n-1))=2A(2,n-1)$$

waaruit in verband met $A(2,1)=2$ volgt dat

$$A(2,n)=2^n$$

We constateren dat de getallen op de a-rij op rekenkundige wijze aangroeien, lineaire groei dus, en dat die op de b-rij op meetkundige wijze aangroeien, exponentiële groei. Op analoge wijze onderzoeken we nu de c-rij, de velden met $m=3$. We vinden

$$A(3,n)=2\ \hat{}\ A(3,n-1)$$

en dat is de hierboven beschouwde supergroei. We kunnen schrijven

$$A(3,n)=2\ \hat{}\ 2\ \hat{}\ 2\ \hat{}\ \ldots\ \hat{}\ 2$$

met een rij van n exponenten.

De c-rij groeit supersnel aan als 2, 4, 16, 65 536,... Het vijfde niet opgeschreven getal, bestaande uit 19 729 cijfers, onttrekt zich al aan ons voorstellingsvermogen. Dit is nog maar het begin, maar het zal inmiddels wel duidelijk zijn dat elke volgende verticale rij nog veel sneller aangroeit dan de voorafgaande rij. Ondanks het feit dat de hogere waarden van $A(m,n)$ letterlijk onvoorstelbaar groot zijn, bijna oneindig zouden we haast zeggen, zijn ze dank zij de recursieve definitie ondubbelzinnig vastgelegd.

Natuurkundigen die een nieuwe bouwsteen van de natuur vinden plegen in aanmerking te komen voor een Nobelprijs. Voor wiskundigen die een fundamenteel nieuw beginsel ontdekken is zoiets niet weggelegd, en dat is jammer want Mandelbrot, de ontdekker van de fractals, zou stellig daarvoor voorgedragen kunnen worden. De betekenis van de zogenaamde fractal meetkunde is allerminst beperkt tot alleen de wiskunde, fractals vinden toepassing in theorie en techniek, dragen bij tot beter begrip van biologische structuren, en leiden tot een aanzienlijke reductie bij het opslaan van bij voorbeeld fotografische gegevens. Fractals kunnen we opvatten als de moderne bouwstenen van gecompliceerde meetkundige figuren. Benoit Mandelbrot werd in 1925 geboren in Warschau, maar emigreerde al vroeg met zijn familie naar Frankrijk en daar ontving hij ook zijn eerste onderricht in de wiskunde. Hij maakte er kennis met het werk van Julia, een tot voor kort vrijwel vergeten Franse wiskundige. Julia had een klasse van merkwaardige puntverzamelingen ontdekt en daarvoor in een bekroonde publikatie van 1919 een groot aantal eigenschappen afgeleid. Hoe zijn figuren er in werkelijkheid uitzagen wist hij nauwelijks, maar nu zijn het fraaie specimina van computerkunst en heten ze Julia-fractals. Het enige voorbeeld dat men toen kende was de vreemde kromme bedacht door Von Koch, een kronkellijn van oneindige lengte met oneindig veel kronkels op steeds kleinere schaal, gelijkvormig met zichzelf. Met deze historische gegevens als uitgangspunt ontwierp Mandelbrot een grootse conceptie waarin hij het begrip fractal een zelfstandige plaats gaf, als een oerprincipe van meetkundige vormen. Toen Mandelbrot, later bij de IBM werkzaam, vele fractals op het beeldscherm zichtbaar kon maken was een nieuwe wetenschap of liever een nieuwe natuurbeschouwing geboren, de fractal meetkunde.

Een Julia-fractal

In aansluiting op het fundamentele theoretische werk van Julia bestudeerde Mandelbrot, en met hem vele anderen, in het bijzonder de fractals die behoren bij een iteratieve kwadratische afbeelding. Voor wie enigermate vertrouwd is met de rekenwijze van de complexe getallen is de definitie uiterst eenvoudig. Het gaat om de complexe transformatie of afbeelding

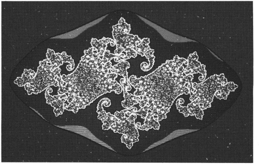
$$z \rightarrow z^2 + c$$

welke meetkundig correspondeert met de verplaatsing van een punt P, het beeldpunt in het x,y-vlak van het complexe getal $z=x+iy$.

Nemen we het punt $z=0$, meetkundig gesproken de oorsprong, als beginpunt dan levert de transformatie c als volgend punt. Her-

halen we de kwadratische afbeelding dan is $c^2 + c$ het volgende punt, daarna komt $c^4 + 2c^3 + c^2 + 1$ enzovoort. In gedachten kunnen we oneindig lang doorgaan, en de computer kan onze gedachten een heel eind volgen door het produceren van een puntenrij op het beeldscherm, de baan van het gekozen beginpunt.

De banen kunnen we verdelen in twee soorten. Alle punten waarvan de baan naar oneindig gaat vormen met elkaar het zogenaamde aantrekkende gebied van oneindig. Van alle andere punten gaat de baan ergens heen, naar een limietverzameling. De rand van het aantrekkende gebied van oneindig is de zogenaamde verzameling van Julia, een Julia-set zegt men wel. De Julia-set is bijna altijd een fractal, en een fraai voorbeeld zien we in figuur 9.2.

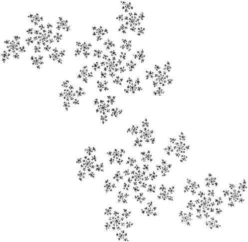


Figuur 9.2 Een Julia-set van de kwadratische afbeelding.

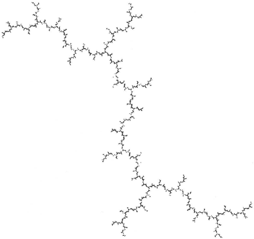
Er is een grote verscheidenheid aan Julia-fractals. Voor elke waarde van c, dat wil zeggen voor elk punt van het platte vlak, is er zo'n figuur. In de figuren 9.3 en 9.4 tonen we twee andere exemplaren van de kwadratische familie. De eerste bestaat uit een onsamenhangend geheel van losse punten, als los zand of dwarrelend stof, een zogenaamde stoffractal. De tweede doet denken aan een bliksem of aan een kale boom en heet een dendriet.

In al deze Julia-fractals herkennen we het principe van de zelfgelijkvormigheid. Dergelijke fractals kunnen met behulp van de computer op eenvoudige wijze op het beeldscherm verkregen worden, en met de twee zich in de Appendix bevindende programma's JULIAS en JULIAP kan de terzake kundige lezer naar hartelust experimenteren. Met behulp van de computer kan men op kleine details inzoomen en constateren dat we bij een willekeurige vergroting – voor zover de technische hulpmiddelen zulks veroorloven – steeds weer dezelfde fraaie patronen blijven zien. Nog eens, het oneindig kleine kunnen we niet zichtbaar maken, maar we kunnen met behulp van de computer ons er wel een voorstelling van maken.

Figuur 9.3 Een stoffractal uit de kwadratische familie.



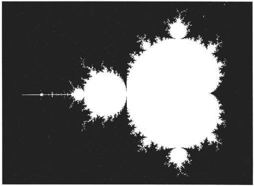
Figuur 9.4 Een dendriet uit de kwadratische familie.



Mandelbrot kwam op de gelukkige gedachte voor de kwadratische familie van Julia-fractals een soort meetkundige catalogus te vervaardigen. Zoals hierboven gezegd behoort er bij elk punt P, beeldpunt van het complexe getal c, een Julia-set van de kwadratische familie. Mandelbrot verdeelde de Julia-fractals in twee typen, de samenhangende en de stofachtige. Elk punt waarvoor de Julia-set samenhangend was werd met zwart gemarkeerd, en wanneer dat voor alle punten uitgevoerd kon worden zou er een zwarte figuur moeten ontstaan. Julia had al duidelijk gemaakt dat het type van de fractal geheel bepaald was door de baan van de oorsprong, het punt $z=0$. Het was daartoe voldoende met behulp van de computer die baan voldoende ver te berekenen. Ging de baan naar oneindig dan was de bijbehorende Julia-fractal stofachtig.

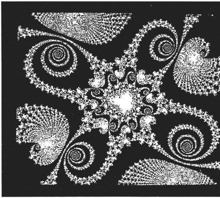
Na zijn vertrek uit Frankrijk vond Mandelbrot in de Verenigde Staten een werkkring bij de IBM en had er alle mogelijkheden computerexperimenten uit te voeren. In 1979 verkreeg hij de eerste afbeelding van wat later de Mandelbrot-set zou gaan heten. Tegenwoordig, zo'n tien jaar later, kost het weinig moeite thuis met een microcomputer een beter plaatje te krijgen. In figuur 9.5 tonen we het resultaat van enige huisvlijt. Met het programma MANDELP in de Appendix is de lezer in staat, eventueel met kleine aanpassingen, de Mandelbrot-figuur of een detail ervan zelf op het scherm te krijgen.

Figuur 9.5 De Mandelbrot-set.



Het oorspronkelijk door Mandelbrot verkregen resultaat toonde heel wat minder details. Wel zag hij het niervormige gedeelte en de eraan grenzende cirkelvormige schijf, maar verder waren er wat vage eilandjes. Latere en betere computerafbeeldingen lieten een soort continent zien met een rafelige rand, omringd door een ar-

chipel van eilandjes. Bovendien bleken sommige eilandjes weer een miniatuurversie van het continent te zijn. Ook de rand bleek veel ingewikkelder te zijn dan men aanvankelijk had gedacht. Bij verdere vergrotingen kwamen naast de bekende patronen ook gecompliceerde nieuwe figuren te voorschijn van een fascinerende schoonheid. In figuur 9.6 tonen we een dergelijk detail, een vergroting met een factor tien miljoen van een stukje rand in de omgeving van het punt (– .74 967 774, .03 031 335). Zoiets kan nog thuis op een microcomputer worden gemaakt, maar dan moet men wel over een snelle computer en een goed programma beschikken, en dan nog kost het soms vele uren.



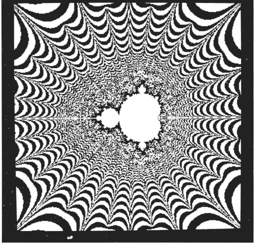
Figuur 9.6 Een detail van de rand van de Mandelbrot-set.

Dergelijke zaken had men nog nooit gezien. Kortom, Mandelbrot was gestoten op een totaal nieuw meetkundig object. Hierdoor geïnspireerd zetten wiskundigen zich aan de arbeid, daarbij geholpen door de resultaten van de computerkunstenaars. Weldra vond men langs theoretische weg dat de Mandelbrot-set een samenhangend geheel vormt, en dat de eilandjes met heel smalle landbruggetjes aan elkaar en aan het continent vastzitten. Een beter beeld is misschien nog een spinneweb waarvan de draden bezet zijn met kleine pareltjes die zelf weer miniatuurtjes zijn van het geheel. Hier toont zich de theorie weer superieur aan de computer. De spinraglijntjes ontsnappen aan het oplossend vermogen van welke computer dan ook, experimenteel kunnen ze niet gemakkelijk worden gevonden, maar hun bestaan is nu verzekerd.

Gewoonlijk is er op weg naar oneindig, oneindig ver weg of oneindig klein, na een aantal stappen niet zoveel nieuws meer te beleven. Bij een gewone zelfgelijkvormige fractal ziet men steeds weer hetzelfde basispatroon. Bij andere processen, bij voorbeeld de ontwikkeling van π in oneindig veel decimalen, blijkt al spoedig dat er

van enige structuur in de decimalenrij niets te bespeuren valt. In de regel zijn we dus gauw uitgepraat, òf we constateren 'orde', òf we vinden 'chaos'. In de Mandelbrot-set gaat het echter almaar door met een openbaring van steeds nieuwe werelden van schoonheid. Om een fragmentje van de rand van de Mandelbrot-set miljoenvoudig op te blazen is voor een microcomputer geen kunst meer.

Laten we eens aannemen dat de Mandelbrot-set na een passende vergroting uitgespreid wordt over het aardoppervlak zodanig dat hij echt de omvang krijgt van een continent met schiereilanden. De wiskundige grootte van vier eenheden (de as van de Mandelbrot-set bedraagt precies 2.25) vergelijkend met de lengte van de equator komen we op een schaal van 10^7 meter per eenheid. Het in figuur 9.6 afgebeelde detail is dan twee meter breed. In figuur 9.7 wordt echter een detail getoond in de omgeving van (– .199 999 862 122 914,0) met een vergroting van tien biljoen. Dezelfde schaal gebruikend bekijken we nu een detail van maar twee micron, de grootte van een bacterie!



Figuur 9.7 Een biljoenvoudige vergroting van een detail van de Mandelbrot-set.

We kunnen het ook anders doen, laten we het detail opblazen tot de grootte van een postzegel en laten we ons dan afvragen hoe groot de Mandelbrot-set dan wel moet worden wanneer deze in dezelfde mate wordt vergroot. Het is duidelijk dat er op aarde geen plaats meer is en dat we met kosmische maten moeten meten. Welnu, wanneer de punt van de antenne op de as van de Mandelbrot-set in de zon wordt geplaatst strekt de Mandelbrot-set zich tot voorbij de

baan van de aarde uit! Figuur 9.7 laat in het centrum een miniatuur versie van de Mandelbrot-set zien omgeven door een stelsel lijnen met een fraai golf- of zigzag-patroon. Die lijnen hebben de betekenis van de potentiaallijnen van een elektrisch veld. Het is alsof de Mandelbrot-set zelf elektrisch geladen is. Bij afbeeldingen van details van de Mandelbrot-set worden ze vaak gebruikt, zowel ter verdieping van het wiskundige inzicht als ter verhoging van de artistieke waarde.

Geheimen ontsluierd

Als een toegift voor die lezers die over iets meer wiskundige kennis beschikken, met name de rekenwijze van het complexe getal, geven we hier een summier overzicht van de voornaamste eigenschappen van de Mandelbrot-set. Elk punt c van die verzameling kenmerkt het type van de Julia-set die behoort bij de iteratieve afbeelding

$$z_{n+1}=z_n^2+c$$

De Julia-set is dan samenhangend, en volgens Julia hangt dit af van de baan van het punt $z_0=0$. Elk punt van die baan correspondeert met een veelterm in c die we als $p_n(c)$ schrijven.

Een eenvoudige berekening geeft

$$p_0(c)=0$$
$$p_1(c)=c$$
$$p_2(c)=c^2+c$$
$$p_3(c)=c^4+2c^3+c^2+c$$
$$\ldots$$

Wanneer voor de betrokken waarde van c de rij $p_n(c)$ niet naar oneindig gaat is de Julia-set samenhangend en maakt c dus deel uit van de Mandelbrot-set. De positie van c hangt af van het gedrag van deze rij. In veel gevallen bezit de Julia-set een inwendige en bevindt zich daarin een uit eindig veel punten bestaande aantrekkende verzameling van limietpunten. Er zijn de volgende mogelijkheden:

De rij convergeert tot een enkele limietwaarde. Het punt c behoort dan tot het niervormige hoofdgebied.

De rij convergeert tot een twee-cyclus. Het punt c behoort tot het daaraan grenzende cirkelvormige gedeelte $|c+1/2|<1/4$.

De rij convergeert tot een drie-cyclus. Het punt c behoort of tot een van de twee ronde schijfjes boven en onder het niervormige hoofdgebied of tot het grootste eiland links.

Wanneer de rij convergeert tot een cyclus van hogere orde, zeg m, dan behoort c òf tot een miniatuur van de Mandelbrot-set, òf tot een schijfvormig gebiedje dat begrensd wordt door een groter schijfje, òf tot het hoofdgebied. Hoe groter de orde des te kleiner

het schijfje. De middelpunten van die schijfjes kunnen we op eenvoudige wijze bepalen als de nulpunten van de veelterm $p_m(c)$. Is m bij voorbeeld gelijk aan 17 dan vindt men, voor de computer een standaardtechniek, $2^{16}=65\ 536$ nulpunten. Voor elk nulpunt heeft de bijbehorende Julia-set een aantrekkende cyclus van 16 (of misschien 8, 4, enzovoort) evenwichtspunten, in vaktaal een superstabiele cyclus. Elk nulpunt is centrum van een grote of kleine schijf die in zijn geheel tot de Mandelbrot-set behoort.

Wanneer voor een bepaalde waarde van c de p_n-rij na een wat onregelmatig begin daarna op periodieke wijze telkens dezelfde cyclus van waarden oplevert, ligt het beeldpunt op een knooppunt of eindpunt van de draadvormige filamenten of antennes. De bijbehorende Julia-set is dan een dendriet. Het eenvoudigste geval doet zich voor bij de waarde $c=i$. De rij wordt dan

$$0 \quad i \quad -1+i \quad -i \quad -1+i \quad -i \quad -1+i \quad \ldots$$

Het beeldpunt van i bevindt zich in de Mandelbrot-set aan het uiteinde van het bovenste grootste tentakel. De Julia-set zelf was al afgebeeld in figuur 9.4, een soort bliksemschicht.

De rand van de Mandelbrot-set stelt de wiskundigen nog voor problemen. Vermoed wordt dat de fractale dimensie gelijk aan 2 is, hetgeen duidt op een buitengewoon ingewikkelde structuur, die bij elke schaalvergroting trouwens steeds zichtbaarder wordt. Bovendien is de rand overal bezaaid met miniatuur versies van de Mandelbrot-figuur, welke op hun beurt...

En zo kunnen we ook hier oneindig lang doorgaan.

APPENDIX

De volgende computerprogramma's zijn geschreven in Basic. Wie deze programma's wil toepassen moet bedacht zijn op een eventuele aanpassing van het getal achter de SCREEN opdracht. Dat kan bij voorbeeld ook 3 of 9 zijn. Aanbevolen wordt om van Turbo Basic gebruik te maken. De onderstaande programma's kunnen daarvoor in ongewijzigde vorm (op schijf opgeslagen in ASCII formaat) gebruikt worden.

```
10 REM ***FACTORISATIE VAN GROOT GETAL***
20 REM ***NAAM:PRIEM***
30 SCREEN 12 : CLS
40 J=1 : DIM A(30)
50 DEFLNG N
60 INPUT N : REM ***N<2147,483647 ***
70 WHILE N/2=INT(N/2)
80 A(J)=2 : PRINT J,2 : J=J+1
90 N=INT(N/2)
100 WEND : F=3
110 WHILE N/3=INT(N/3)
120 A(J)=3 : PRINT J,3 : J=J+1
130 N=INT(N/3)
140 WEND
150 WHILE F<SQR(N+1)
160 F=F+2
170 WHILE N/F=INT(N/F)
180 A(J)=F : PRINT J,F : J=J+1
190 N=INT(N/F)
200 WEND : WEND
210 PRINT J,N
220 END
```

```
10 REM ***FRACTALS IN EEN VIERKANT***
20 REM ***NAAM:SQUARE***
30 SCREEN 12 : CLS : RANDOMIZE 1 : PI=3.141593
40 WINDOW (-3.2,-2.4)-(3.2,2.4) : CLS
50 PRINT" 0 = IDENTITEIT, 1 = ROTATIE 90 , 2 = ROTATIE 180 ,
   3 = ROTATIE 270"
60 PRINT" 4,5,6,7 ALS 0,1,2,3 MET SPIEGELING"
70 PRINT" TOETS DRIE GETALLEN GEKOZEN UIT 0,1,2,3,4,5,6,7"
80 PRINT : PRINT" KIES BIJVOORBEELD 1,3,5"
90 INPUT T1,T2,T3 : CLS
100 T=T1 : L=1 : GOSUB 160 : T=T2 : L=2 : GOSUB 160 : T=T3 :
    L=3 : GOSUB 160
110 E(1)=1 : F(1)=0 : E(2)=-1 : F(2)=0 : E(3)=0 : F(3)=-1
120 X=0 : Y=0 : FOR I=1 TO 20000 : L=INT(1+3*RND)
130 Z=X : X=A(L)*X+B(L)*Y+E(L) : Y=C(L)*Z+D(L)*Y+F(L)
140 IF I>16 THEN PSET (X,Y)
150 NEXT I : BEEP : END
160 IF T=0 THEN A(L)=1/2 : B(L)=0 : C(L)=0 : D(L)=1/2
170 IF T=1 THEN A(L)=0 : B(L)=-1/2 : C(L)=1/2 : D(L)=0
180 IF T=2 THEN A(L)=-1/2 : B(L)=0 : C(L)=0 : D(L)=-1/2
190 IF T=3 THEN A(L)=0 : B(L)=1/2 : C(L)=-1/2 : D(L)=0
200 IF T=4 THEN A(L)=-1/2 : B(L)=0 : C(L)=0 : D(L)=1/2
210 IF T=5 THEN A(L)=0 : B(L)=1/2 : C(L)=1/2 : D(L)=0
220 IF T=6 THEN A(L)=1/2 : B(L)=0 : C(L)=0 : D(L)=-1/2
230 IF T=7 THEN A(L)=0 : B(L)=-1/2 : C(L)=-1/2 : D(L)=0
240 RETURN : END
```

```
10 REM ***JULIA FRACTAL VAN Z:=Z^2+C , MONTE CARLO METHODE
   ***
20 REM ***NAAM:JULIAS***
30 SCREEN 12 : CLS : RANDOMIZE 1
40 WINDOW (-2,-1.5)-(2,1.5)
50 A=-.55 : B=0 : REM ***KIES B>=0 ***
60 A1=(.25-A)/2 : B1=-B/2 : R1=SQR(A1^2+B1^2)
70 X=.5+SQR(R1+A1) : Y=-SQR(R1-A1) : REM ***BEGINPUNT***
80 FOR K=0 TO 2000
90 X1=(X-A)/2 : Y1=(Y-B)/2 : S=SQR(X1*X1+Y1*Y1)
100 IF RND<.5 THEN GOSUB 140 ELSE GOSUB 160
110 PSET (X,Y)  : PSET (-X,-Y)
120 IF B=0 THEN PSET (X,-Y) : PSET (-X,Y)
130 NEXT K : BEEP : A$=INPUT$(1) : END
140 X=SQR(S+X1) : Y=SQR(S-X1) : IF Y1<0 THEN Y=-Y
150 RETURN
160 X=-SQR(S+X1) : Y=-SQR(S-X1) : IF Y1<0 THEN Y=-Y
170 RETURN : END
```

```
10 REM ***GEVULDE JULIA FRACTAL VAN Z:=Z^2+C ***
20 REM ***NAAM:JULIAP***
30 SCREEN 12 : CLS
40 A=-.12 : B=.74 : REM ***KEUZE A EN B***
50 XM=320 : YM=240 : REM ***COORDINATEN CENTRUM BEELDSCHERM
   ***
60 BH=4/3 : REM ***VERHOUDING BREEDTE/HOOGTE BEELDSCHERM***
70 P1=-1.61 : P2=-1.5 : P3=1.61 : P4=1.5 : REM ***KEUZE
   WINDOW***
80 N1=200
90 N2=INT(BH*YM*N1*(P4-P2)/((P3-P1)*XM))
100 A1=(P3-P1)/(2*N1) : A2=(P1+P3)/2
110 B1=(P4-P2)/(2*N2) : B2=(P2+P4)/2
120 FOR I=0 TO N1
130 FOR J=-N2 TO N2
140 X=I*A1+A2 : Y=J*B1+B2
150 FOR K=1 TO 50
160 X1=X*X : Y1=Y*Y : S=X1+Y1 : Y=2*X*Y+B : X=X1-Y1+A
170 IF S>100 THEN L=K MOD 2 : GOTO 190
180 NEXT K : L=1
190 PSET(XM+I,YM-J),L : PSET(XM-I,YM+J),L
200 NEXT J : NEXT I : END
```

```
10 REM ***MANDELBROT TOTAAL BEELD***
20 REM ***NAAM:MANDELP***
30 SCREEN 12 : CLS
40 XM=320 : YM=240 : BH=4/3
50 P1=-2.2 : P2=-1.4 : P3=.9 : P4=1.4
60 N1=300 : N2=INT(BH*YM*N1*(P4-P2)/((P3-P1)*XM))
70 FOR I=-N1 TO N1
80 A=((N1-I)*P1+(N1+I)*P3)/(2*N1)
90 FOR J=0 TO N2
100 B=J*P4/N2
110 U=4*(A*A+B*B) : V=U-2*A+1/4
120 IF U+8*A+15/4<0 THEN L=0 : GOTO 200
130 IF V-SQR(V)+2*A-1/2<0 THEN L=0 : GOTO 200
140 X=A : Y=B
150 FOR K=1 TO 50
160 Z=X : X=X*X-Y*Y+A : Y=2*Z*Y+B
170 S=X*X+Y*Y
180 IF S>4 THEN GOTO 210
190 NEXT K
200 PSET (XM+I,YM-J) : PSET (XM+I,YM+J)
210 NEXT J : NEXT I : BEEP : END
```

```
10 REM ***STANDARD MAP***
20 REM ***NAAM:STANDARD***
30 SCREEN 12 : CLS : PI=3.141593
40 C=2*PI : A=1/C
50 WINDOW (-.7,-.2)-(1.7,2.2)
60 PSET (0,.5) : PSET (1,.5) : PSET (0,1.5) : PSET (1,1.5)
70 DIM X(10),Y(10),P(10)
80 DATA 0,.4,400,0,.3,600,0,.2,600,0,.15,600,0,.02,2000
90 DATA .2,0,1000,.8,0,1000,.43,0,1000,.3,0,1000,.7,0,1000
100 FOR J=1 TO 10 : READ X(J),Y(J),P(J) : NEXT J
110 FOR K=1 TO 10 : X=X(K) : Y=Y(K)
120 FOR N=0 TO P(K)
130 X=X-INT(X) : Y=Y-INT(Y)
140 PSET (X,Y) : PSET (X,Y+1)
150 IF X<.5 THEN PSET (X+1,Y) : PSET (X+1,Y+1) ELSE PSET
(X-1,Y) : PSET (X-1,Y+1)
160 X=X+A*SIN(C*Y) : Y=Y+X
170 NEXT N : BEEP : NEXT K
180 A$=INPUT$(1) : END
```

```
10 REM ***DE HENON AANTREKKER,TOTAAL***
20 REM ***NAAM:HENON1***
30 SCREEN 12 : CLS
40 A=1.4 : B=.3 : REM ***KEUZE PARAMETERS***
50 WINDOW (-1.5,-.45)-(1.5,.45)
60 X=.6 : Y=.6 : REM ***KEUZE BEGINPUNT***
70 FOR K=1 TO 10000
80 Z=X : X=1+Y-A*X*X : Y=B*Z
90 IF K>20 THEN PSET (X,Y)
100 NEXT K : END
```

```
10 REM ***DE HENON AANTREKKER,DETAIL***
20 REM ***NAAM:HENON2***
30 SCREEN 12 : CLS
40 A=1.4 : B=.3 : REM ***KEUZE PARAMETERS***
50 WINDOW (.54,.15)-(.73,.21)
60 X=.6 : Y=.6 : REM ***KEUZE BEGINPUNT***
70 FOR K=1 TO 50000!
80 Z=X : X=1+Y-A*X*X : Y=B*Z
90 IF K>20 THEN PSET (X,Y)
100 NEXT K : END
```

```
10 REM ***DE LORENZ ATTRACTOR***
20 REM ***NAAM:LORENZ1***
30 SCREEN 12 : CLS : PI=3.141593
40 WINDOW (-50,0)-(50,50)
50 A=10 : B=8/3 : C=28 : D=.003 : X=-12.5 : Y=-17.4 : Z=26
60 FOR K=0 TO 3 : CS=COS(K*PI/5) : SS=SIN(K*PI/5)
70 FOR M=1 TO 10000
80 U=X : V=X*CS-Y*SS : W=X*SS+Y*CS
90 PSET (V+W,Z)
100 X1=X+D*A*(Y-X) : Y1=Y+D*(X*(C-Z)-Y) : Z1=Z+D*(X*Y-B*Z)
110 X2=X1+D*A*(Y1-X1) : Y2=Y1+D*(X1*(C-Z1)-Y1)
    : Z2=Z1+D*(X1*Y1-B*Z1)
120 X=(X+X2)/2 : Y=(Y+Y2)/2 : Z=(Z+Z2)/2
130 NEXT M : A$=INPUT$(1) : CLS
140 NEXT K : END
```

```
10 REM ***DE LORENZ ATTRACTOR***
20 REM ***NAAM:LORENZ2***
30 SCREEN 12 : CLS
40 WINDOW (-50,0)-(50,50)
50 A=10 : B=8/3 : C=28 : D=.002 : Q=80
60 DIM X(Q),Y(Q),Z(Q)
70 FOR K=1 TO Q : X(K)=-12.5+K/100 : Y(K)=-17.4 : Z(K)=26
   : NEXT K
80 FOR M=1 TO 5000
90 FOR J=1 TO Q : X=X(J) : Y=Y(J) : Z=Z(J)
100 X1=X+D*A*(Y-X) : Y1=Y+D*(X*(C-Z)-Y) : Z1=Z+D*(X*Y-B*Z)
110 X2=X1+D*A*(Y1-X1) : Y2=Y1+D*(X1*(C-Z1)-Y1)
    : Z2=Z1+D*(X1*Y1-B*Z1)
120 X=(X+X2)/2 : Y=(Y+Y2)/2 : Z=(Z+Z2)/2
130 PSET (X+Y,Z),14 : PSET (X(J)+Y(J),Z(J)),0
140 X(J)=X : Y(J)=Y : Z(J)=Z
150 NEXT J : NEXT M : END
```

```
10 REM ***DE VERZAMELING VAN CANTOR***
20 REM ***NAAM:CANTOR1***
30 SCREEN 12 : CLS
40 RANDOMIZE 1
50 WINDOW (0,-.1)-(1,.1)
60 X=.3 : REM ***BEGINPUNT***
70 FOR K=1 TO 100
80 IF RND<.5 THEN X=X/3 ELSE X=(X+2)/3
90 PSET (X,0)
100 NEXT K : END
```

```
10 REM ***DUIVELSTRAP***
20 REM ***NAAM:CANTOR2***
30 SCREEN 12 : CLS
40 WINDOW (-.3,-.2)-(1.3,1.2)
50 LINE (0,0)-(1,0) : LINE -(1,1)
60 DEF FNF(X)=SGN(X-INT(X)-1/2)
70 H=2^(-10) : PSET (0,0)
80 FOR X=0 TO 1-H STEP H
90 S=.5 : FOR I=0 TO 6
100 S=S+FNF(X*2^I)/3^(1+I)
110 NEXT I
120 LINE -(X,S)
130 NEXT X
140 PAINT (.5,.1) : END
```

BIBLIOGRAFIE

Courant, R. en Robbins, H. *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. Oxford University Press, paperback, 4e ed., 1978

Dijksterhuis, E.J. *De elementen van Euclides*. Noordhoff, 1929

Escher, M.C. *Het oneindige. M.C. Escher over eigen werk*. Meulenhoff/Landshoff, 1986

Falletta, N. *Logische en onlogische paradoxen*. Aramith, 1989

Gleick, J. *Chaos. De derde wetenschappelijke revolutie*. Contact, 1989

Heyting, A. *Projectieve meetkunde*. Epsilon, 1986

Lauwerier, H.A. *Fractals. Meetkundige figuren in eindeloze herhaling*. Aramith, 1987

Mandelbrot, B.B. *The fractal geometry of nature*. Freeman, 1982

Maor, E. *To infinity and beyond. A cultural history of the infinite*. Birkhäuser, 1987

Pedoe, D. *Perspectieven doorzien. Meetkunde als thema in de kunst*. Aramith, 1988

Peitgen, H.-O. en Richter, P.H. *The beauty of fractals*. Springer-Verlag, 1986

Purkert, W. en Ilgauds, H.J. *Georg Cantor, 1845-1918*. Birkhäuser, 1987

Rucker, R. *Oneindigheid. Filosofie en wetenschap van het oneindige*. Contact, 1986

De Vries, H. *De vierde dimensie. Een inleiding tot de vergelijkende studie der verschillende meetkunden.* Noordhoff, 1925

Van der Waerden, B.L. *Ontwakende wetenschap. Egyptische, Babylonische en Griekse wiskunde.* Noordhoff, 1950

Wells, D. *Woordenboek van eigenaardige en merkwaardige getallen.* Bakker, 1987

ILLUSTRATIEVERANTWOORDING

Alle illustraties zijn van de hand of uit het bezit van de auteur met uitzondering van:

(omslagillustratie) Monika Buch, *Ontmoeting van golven*, 1987;

(p. 72) Escher, *Cirkellimiet 3*, © 1989 M.C. Escher Heirs/Cordon Art, Baarn, Holland;

(p. 75) *Hart* uit *Spectrum Gezondheidszorg Encyclopedie*, (GZB 659 000, p. 112);

(p. 77) *Ons planetenstelsel* van Stichting De Koepel, Utrecht;

(p. 81) *Een opslagring* van NIKHEF, Amsterdam.

HANS LAUWERIER

ONEINDIGHEID

In dit boek wordt het begrip oneindig beschouwd vanuit natuurwetenschappelijk standpunt. Oneindig is een abstract begrip in de wiskunde. In de kosmos heeft oneindig betrekking op ruimte en tijd. We spreken van oneindig veel, oneindig groot en oneindig klein, van oneindig ver weg. Oneindigheid heeft meer dan twintig eeuwen de denkende mens geïntrigeerd, en dat gegeven was aanleiding voor de auteur er een soort cultuurhistorische reis in de eeuwen aan te verbinden, van de wereld van Pythagoras en Euclides tot in ons computertijdperk. Van Zeno en Archimedes maken we een sprong naar de zeventiende en achttiende eeuw met Newton en Euler. Newton ontwierp de differentiaal- en integraalrekening als een vernuftige rekenwijze met oneindig veel oneindig kleine grootheden. Euler telde oneindig veel getallen op en wist daaraan zin te verbinden. Maar in de negentiende eeuw werd meer fundamenteel werk verricht dat beter aansloot bij dat van de Grieken. Hoogtepunt is Cantor die aantoonde dat we een aftelbare en een onaftelbare oneindigheid dienen te onderscheiden.

GHEIDONEINDIGHEI

Tegenwoordig zijn vragen met betrekking tot de oneindigheid weer actueel geworden nu men in staat is ingewikkelde wiskundige modellen met behulp van de computer nauwkeurig te analyseren. Het succes van ruimtevaartprojecten is daarvan een goed voorbeeld. Steevast zijn de vragen: 'Hoe gaat het verder en wat gebeurt er op de lange duur? Blijft bij voorbeeld ons planetenstelsel stabiel alleen al op grond van de wetten van Newton?' Aan de hand van eenvoudige computerprogramma's wordt de lezer in staat gesteld zijn blik op de oneindigheid te verruimen.

ISBN 90 6834 055 7

ARAMITH UITGEVERS

HANS LAUWERIER ONEINDIGHEID